

Model Persediaan Bahan Baku *Multi Item* dengan Mempertimbangkan Masa Kadaluwarsa, Unit Diskon dan Permintaan yang Tidak Konstan

Stanley Surya Jaya¹, Tanti Octavia^{1*}, I Gede Agus Widyadana¹

Abstract: In the classical economic ordering quantity (EOQ) model, it was assumed that products have no expire date. However, in practices, some products such as food and milk, have exact expire date and some vendors tries to reduce their lost by introducing quantity unit discount. In this paper, we develop multi items inventory models by considering product expire date and quantity unit discount for stochastic demand environment. Due to complexity of the models, simulation and Genetic Algorithm are used to solve the models. We then verify the models using a numerical example and sensitivity analysis. The results from sensitivity analysis show that inventory cost and backorder cost have significant effect to ordering time.

Keywords: Expire date, unit discount, multi item, sthochastic demand.

Pendahuluan

Pengendalian persediaan bahan baku pada industri makanan atau produk-produk lain yang berkurang nilainya dengan berjalannya waktu serta memiliki waktu kadaluwarsa merupakan salah satu hal yang sangat penting untuk dilakukan. Hal ini dikarenakan perusahaan harus berusaha memenuhi permintaan konsumen yang bersifat tidak pasti dengan menggunakan bahan baku bersifat *perishable* (dapat mengalami penurunan nilai setelah waktu tertentu). Persediaan bahan baku yang berlebih pada kondisi ini dapat menimbulkan biaya kadaluwarsa yang besar. Kekurangan bahan baku dapat menimbulkan kerugian terjadinya kehilangan penjualan. Biaya yang ditimbulkan pada pengendalian persediaan (Elsayed *et al.* [3]) antara lain biaya pemesanan, biaya pembelian, biaya penyimpanan, dan biaya kekurangan.

Penelitian mengenai pengendalian persediaan untuk barang yang dapat kadaluwarsa telah dilakukan secara intensif oleh beberapa peneliti. Hsu [4] menyusun satu model persediaan untuk barang-barang yang berkurang kuantitas dan kualitas dengan cepat dengan berjalannya waktu hingga kemudian mencapai waktu kadaluwarsa. Barang-barang jenis ini diantaranya adalah bunga, buah-buahan, dan produk bahan makanan lainnya. Penelitian berikutnya berkembang dengan memperhatikan diskon harga, hal ini disebabkan oleh perlunya pemberian diskon harga untuk meningkatkan penjualan bagi barang yang akan kadaluwarsa. Dalam penelitiannya, Bramorski [1] menemukan bahwa 98% respondenya selalu memperhatikan waktu kadaluwarsa

dari produk susu atau produk-produk lainnya yang memiliki waktu kadaluwarsa dan mereka melakukan pembelian dengan sistem LIFO (*Last In First Out*). Bramorski [1] juga menemukan bahwa dengan meningkatkan nilai diskon, responden memiliki keinginan lebih untuk membeli produk yang lebih dekat dengan waktu kadaluwarsa. Oleh sebab itu faktor potongan harga (diskon) perlu dipertimbangkan dalam penyusunan satu kebijakan.

Beberapa bahan baku memiliki potongan harga atau diskon ketika dibeli dalam jumlah tertentu. Jumlah pembelian bahan baku yang semakin banyak dapat menimbulkan diskon yang semakin besar. Adanya diskon dapat menekan biaya produksi dan memberikan keuntungan bagi perusahaan. Permasalahan pembelian bahan baku untuk *multi item* dengan mempertimbangkan faktor diskon telah diteliti salah satunya oleh Djunaidi, *et al.* [2]. Permasalahan persediaan bahan baku dengan mempertimbangkan faktor kadaluwarsa maupun diskon telah banyak diteliti. Indrianti, *et al.* [6] melakukan penelitian pada permasalahan persediaan bahan baku yang mempertimbangkan faktor kadaluwarsa. Penelitian persediaan dengan mempertimbangkan faktor kadaluwarsa dan unit diskon juga dilakukan oleh Prasetyo *et al.* [10]. Kedua penelitian ini memberikan sebuah solusi matematis yang tidak melibatkan waktu kadaluwarsa. Panda, *et al.* [9] mengembangkan sebuah model matematis yang dapat memaksimalkan profit dengan mempertimbangkan pemberian potongan harga sebelum dan sesudah masa kadaluwarsa untuk satu jenis barang. Bramorski [1] mengembangkan model matematis untuk mengendalikan harga produk di supermarket dengan memperhatikan tingkat persediaan dan perkiraan waktu kadaluwarsa sebagai variable keputusan. Hsu *et al.* [5] mengembangkan model matematis untuk pengendalian persediaan dengan

¹ Fakultas Teknologi Industri, Program Studi Teknik Industri, Universitas Kristen Petra. Jl. Siwalankerto 121-131. Surabaya 60238. Email: tanti@petra.ac.id

* Penulis korespondensi

barang yang berkurang kuantitas dan kualitasnya dengan berjalannya waktu, tingkat permintaan musiman, kadaluwarsa dan *backorder*. Mereka mengembangkan dua model yaitu satu dengan mempertimbangkan diskon harga dan satu lagi tanpa mempertimbangkan diskon harga.

Masalah pengendalian ini akan semakin kompleks saat industri memerlukan bahan baku lebih dari satu jenis (*multi item*). Pemesanan bahan baku *multi item* yang tidak tepat berdampak pada tingkat persediaan perusahaan dan menimbulkan biaya tambahan ataupun keterlambatan produksi. Pengendalian bahan baku *multi item* yang baik dibutuhkan agar tingkat persediaan perusahaan berada dalam kondisi optimal. Persediaan untuk kasus *multi item* dengan pertimbangan prosentase kadaluwarsa dan unit diskon telah dikembangkan oleh Limansyah *et al.* [7]. Penelitian ini mengembangkan penelitian Limansyah *et al.* [7] dengan mempertimbangkan tingkat permintaan yang tidak konstan. Selain itu waktu kadaluwarsa barang yang sudah tertentu menjadi perhatian pada penelitian ini, disebabkan mayoritas barang memiliki waktu kadaluwarsa yang hampir pasti. Oleh sebab itu penelitian ini mencoba untuk membuat model yang sudah pernah dikembangkan sebelumnya menjadi lebih realistis. Pada penelitian ini akan dikembangkan model persediaan untuk *multi item* yang mempertimbangkan faktor kadaluwarsa dan unit diskon pada permasalahan *demand* yang tidak konstan.

Makalah ini akan dibagi menjadi empat bagian. Bagian pertama berisi pendahuluan, dan bagian kedua berisi model persediaan yang ada dan pengembangannya. Bagian ketiga dan terakhir merupakan hasil pembahasan dan simpulan dari penelitian yang telah dilakukan.

Metode Penelitian

Pengembangan Model

Notasi yang digunakan dalam model ini adalah:

T_c	: total biaya persediaan
P_c	: biaya pembelian
O_c	: biaya pemesanan
H_c	: biaya penyimpanan
S_c	: biaya <i>shortage</i>
T	: lama periode
T_s	: lama selang waktu siklus
T_k	: lama waktu kadaluwarsa
T_l	: <i>lead time</i>
T_1	: lama waktu efektif (selang antara barang hingga kadaluwarsa)
T_2	: lama waktu tanpa adanya persediaan bahan
T_b	: lama waktu hingga pesanan mulai menjadi <i>backorder</i>
D	: <i>permintaan</i> tahunan

Q	: jumlah pemesanan dalam satu siklus
Q_k	: jumlah kadaluwarsa dalam satu siklus
M	: jumlah maksimum persediaan
B	: jumlah persediaan pada titik pemesanan
S	: biaya per pemesanan
H	: fraksi biaya simpan
C_b	: biaya <i>backorder</i> per unit per waktu
C_l	: biaya <i>lost-sale</i> per unit
P	: harga beli
J	: harga jual setelah kadaluwarsa
T_c^*	: total biaya persediaan minimum
Q^*	: jumlah pembelian optimal
T_s^*	: lama selang waktu siklus optimal
M^*	: jumlah maksimum persediaan optimal
P_{1i}	: harga beli pada <i>price-break</i> ke- i
T_{ci}	: total biaya persediaan dengan harga <i>price-break</i> ke- i
T_{ci}^*	: total biaya persediaan minimum dengan harga <i>price-break</i> ke- i Q_i^*
T_{si}^*	: lama selang waktu siklus optimal dengan harga <i>price-break</i> ke- i
M_i^*	: jumlah maksimum persediaan optimal dengan harga <i>price-break</i> ke- i
P_{cj}	: biaya pembelian bahan j
H_{cj}	: biaya penyimpanan bahan j
S_{cj}	: biaya <i>shortage</i> bahan j
P_{2j}	: harga beli bahan j
D_j	: <i>permintaan</i> tahunan bahan j
Q	: jumlah pemesanan dalam satu siklus
Q_k	: jumlah kadaluwarsa dalam satu siklus
M	: jumlah maksimum persediaan
B	: jumlah persediaan pada titik pemesanan
S	: biaya per pemesanan
H	: fraksi biaya simpan
C_b	: biaya <i>backorder</i> per unit per waktu
C_l	: biaya <i>lost-sale</i> per unit
P	: harga beli
P_{jk}	: harga beli bahan j untuk kombinasi <i>price-break</i> ke- k
T_{ck}	: total biaya persediaan dengan harga kombinasi <i>price-break</i> ke- k
T_{sk}^*	: lama selang waktu siklus optimal dengan harga kombinasi <i>price-break</i> ke- k
Q_{jk}^*	: jumlah pembelian optimal bahan j dengan harga kombinasi <i>price-break</i> ke- k
T_{ck}^*	: total biaya persediaan optimal dengan harga kombinasi <i>price-break</i> ke- k
M_{jk}^*	: jumlah maksimum persediaan bahan j dengan harga kombinasi <i>price-break</i> ke- k
T_{bj}	: lama waktu hingga pesanan mulai menjadi <i>backorder</i> bahan j
Q_t	: jumlah pembelian pada siklus ke- t
Q_{et}	: jumlah sisa persediaan pada siklus ke- t
C_{cjt}	: biaya persediaan bahan j pada siklus ke- t
P_{cjt}	: biaya pembelian bahan j pada siklus ke- t
H_{cjt}	: biaya penyimpanan bahan j pada siklus ke- t
S_{cjt}	: biaya <i>shortage</i> bahan j pada siklus ke- t
T_{kj}	: lama waktu kadaluwarsa bahan j
T_{1j}	: lama waktu efektif (selang antara barang hingga kadaluwarsa)

- D_{jt} : permintaan bahan j selama siklus ke- t
- Q_{jt} : jumlah pemesanan dalam satu siklus bahan j pada siklus ke- t
- Qk_{jt} : jumlah kadaluwarsa dalam satu siklus bahan j pada ke- t
- Cb_j : biaya *backorder* per unit per waktu bahan j
- Cl_j : biaya *lost-sale* per unit bahan j
- J_j : harga jual setelah kadaluwarsa bahan j
- i : tingkat diskon dimana $i = 1, 2, \dots, m$
- m : jumlah tingkatan diskon
- j : jenis bahan dimana $j = 1, 2, \dots, n$
- n : jumlah jenis barang
- k : kombinasi interval *price-break* tiap jenis bahan dimana $k = 1, 2, \dots, o$
- o : jumlah kombinasi interval *price-break* tiap jenis bahan
- t : siklus dimana $t = 1, 2, \dots, p$
- p : jumlah siklus

Model EOQ dengan Mempertimbangkan Masa Kadaluwarsa

EOQ (*Economic Order Quantity*) atau dapat disebut juga jumlah pemesanan yang ekonomis merupakan metode yang spesifik untuk menentukan persediaan barang. EOQ adalah jumlah yang memberikan keseimbangan antara biaya penyimpanan dan biaya pemesanan sehingga didapat biaya total minimum. Total biaya pada EOQ adalah (Russel *et al.* [11]):

$$Tc = PD + \frac{S}{Ts} + \frac{DTs}{2} PH \tag{1}$$

dimana

$$Ts^* = \sqrt{\frac{2S}{DPH}} \tag{2}$$

$$Q^* = DTs^* \tag{3}$$

Pada kasus persediaan yang mengijinkan kekurangan bahan. Komponen total biaya persediaan dipengaruhi pula oleh biaya *backorder* dan atau biaya *lost-sales*. Total biaya untuk EOQ untuk *backorder* yang diijinkan adalah (Muckstadt [8]):

$$Tc = PD + \frac{S}{Ts} + \frac{DTs(\frac{Cb}{PH+Cb})^2}{2} PH + \frac{DTs(\frac{PH}{PH+Cb})^2}{2} Cb \tag{4}$$

dimana

$$M^* = Q^* \frac{Cb}{PH+Cb} \tag{5}$$

$$Tb = Ts \frac{M^*}{Q} \tag{6}$$

dan

$$Ts^* = \sqrt{\frac{2S(PH+Cb)}{DPHCB}} \tag{7}$$

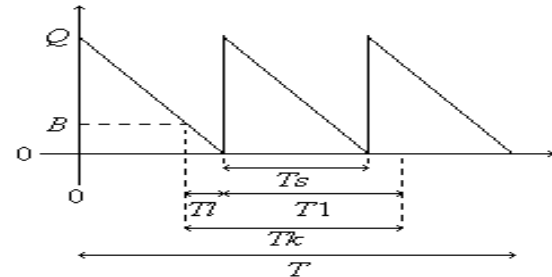
Gambar 1 menunjukkan dua model persediaan yang memperhatikan masa kadaluwarsa. Pada kasus dengan masa kadaluwarsa, bahan akan memiliki waktu efektif dari bahan datang hingga masa kadaluwarsa ($T1$) sebesar:

$$T1 = Tk - Tl \tag{8}$$

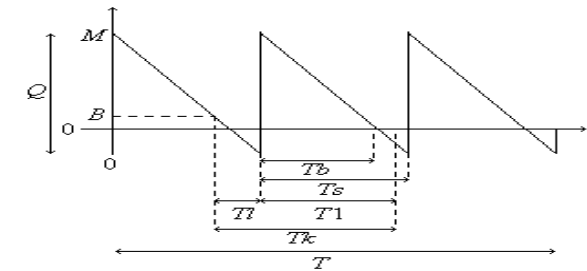
Apabila terjadi kadaluwarsa, maka terdapat selang waktu dimana tidak tersedia persediaan untuk memenuhi permintaan dimana nilainya adalah:

$$T2 = Ts - T1 \tag{9}$$

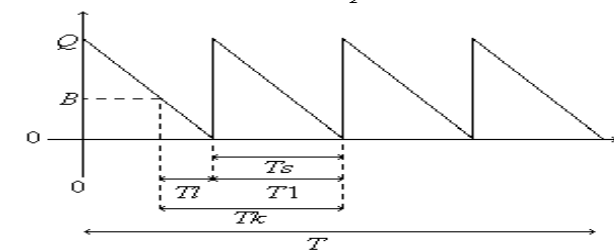
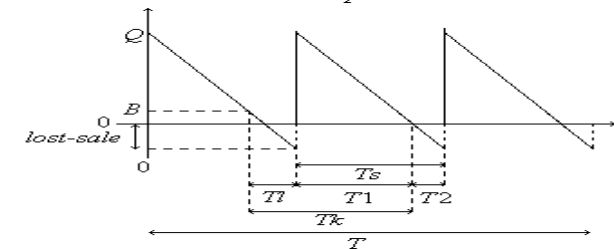
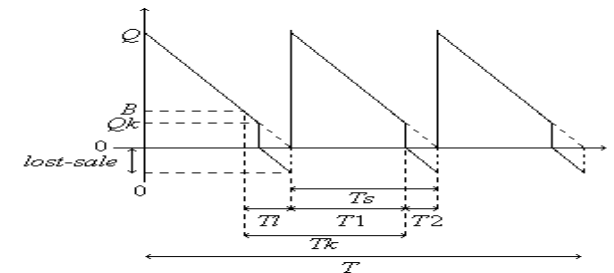
Kasus *lost-sales* kadaluwarsa terjadi apabila $Ts > T1$, sementara pada kasus *backorder*, kadaluwarsa terjadi bila $Tb > T1$.



Gambar 1a. Model tanpa masa kadaluwarsa kasus *lost-sale*



Gambar 1b. Model tanpa masa kadaluwarsa kasus *backorder*



Gambar 2. Model persediaan dengan pertimbangan kadaluwarsa pada kasus *lost-sale*

Gambar 2 menunjukkan bahwa pada kasus *lost-sales* bahan lebih baik dibeli maksimum sesuai dengan jumlah permintaan selama waktu efektif $T1$. Penyelesaian model dengan kasus *lost-sales* ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menghitung nilai Ts dengan persamaan (2). Apabila nilai Ts lebih besar dari $T1$, ubahlah $Ts = T1$ dan masukkan nilai Ts sebagai Ts^*
2. Menghitung Tc^* dengan persamaan (1) dan Q^* dengan persamaan (3)

Pada kasus *backorder*, besar maksimum persediaan (M) akan menghasilkan solusi yang lebih baik jika disesuaikan dengan jumlah permintaan selama waktu efektif $T1$ (lihat Gambar 3). Total biaya yang dikeluarkan pada kondisi ini sebagai berikut:

$$Tc = PD + \frac{S}{Ts} + PHD \frac{(Tk-Tl)^2}{2Ts} + \frac{CbD}{2} (Ts - 2(Tk - Tl) + \frac{(Tk-Tl)^2}{Ts}) \quad (10)$$

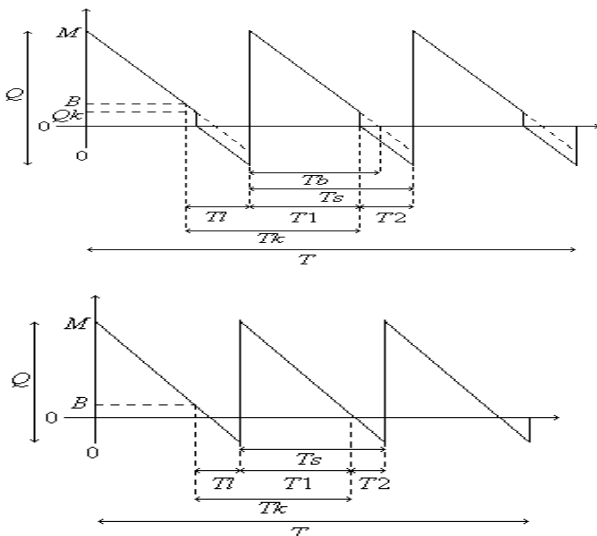
dimana

$$Ts^* = \sqrt{\frac{2(S + \frac{PHD}{2}(Tk-Tl)^2 + \frac{CbD}{2}(Tk-Tl)^2)}{CbD}} \quad (11)$$

Penyelesaian pada model persediaan dengan mempertimbangkan masa kadaluwarsa pada kasus *backorder* ini dapat dilakukan dengan tahapan berikut ini:

1. Menghitung nilai Ts dengan persamaan (7) dan Tb dengan menggunakan persamaan (5) dan (6). Apabila $Tb \leq T1$, maka lanjutkan ke tahap 2. Sebaliknya, lanjut ke tahap 3.
2. Memasukkan nilai Ts sebagai Ts^* , kemudian hitung nilai Tc^* , Q^* , M^* dengan persamaan (4), (3), dan (5), secara berurutan.

Menghitung nilai Ts^* dengan persamaan (11). Apabila $Ts^* < T1$, maka $Ts^* = T1$. Menghitung nilai Tc^* , Q^* , M^* dengan persamaan (10), (3), dan (5), secara berurutan



Gambar 3. Model persediaan dengan pertimbangan masa kadaluwarsa pada kasus *backorder*

Model EOQ dengan Pertimbangan Masa Kadaluwarsa dan Unit Diskon

Pada model dengan pertimbangan unit diskon, ada kalanya lebih baik bahan dibeli meskipun menjadi kadaluwarsa hanya untuk mendapatkan harga barang yang lebih murah. Hal ini perlu dilakukan dikarenakan besarnya biaya akibat kekurangan bahan.

Gambar 4 menunjukkan model persediaan dengan memperhatikan kadaluwarsa, dan unit diskon pada kasus *lost sales* dan *backorder*. Berdasarkan Gambar 4, total biaya persediaan pada kasus *lost-sales* dapat dinyatakan sebagai berikut:

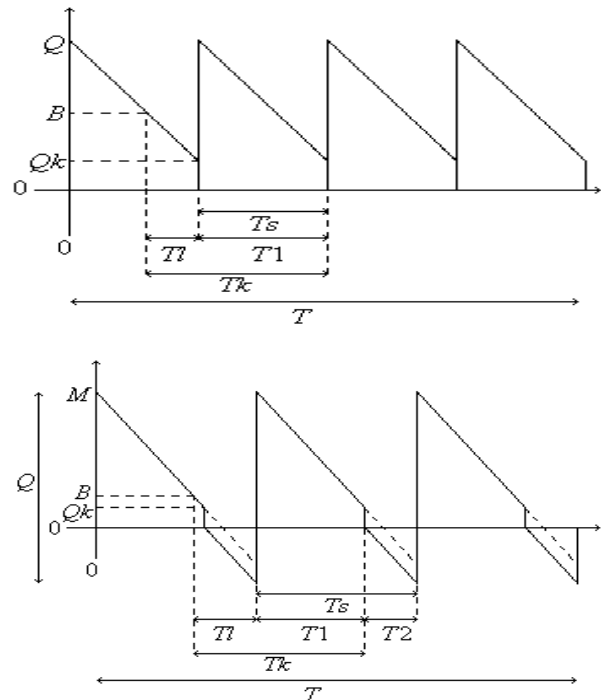
$$Tci = P1_i Q \frac{1}{Ts} - J(Q - DTs) \frac{1}{Ts} + S \frac{1}{Ts} + \frac{P1_i H(2Q - DTs)}{2} \quad (12)$$

Pada kasus *backorder* total biaya persediaan yang dikeluarkan adalah:

$$Tci = P1_i \frac{Q}{Ts} - J \left(\frac{Q}{Ts} - D \right) + \frac{S}{Ts} + \frac{P1_i h}{2} \left(\frac{2Q(Tk-Tl)}{Ts} - D \left(2(Tk - Tl) - \frac{(Tk-Tl)^2}{Ts} \right) \right) + \frac{CbD}{2} \left(Ts - 2(Tk - Tl) + \frac{(Tk-Tl)^2}{Ts} \right) \quad (13)$$

dimana

$$Ts_i^* = \sqrt{\frac{2(P1_i Q - JQ + S + \frac{P1_i H}{2}(2Q(Tk-Tl) + D(Tk-Tl)^2) + \frac{CbD}{2}(Tk-Tl)^2)}{CbD}} \quad (14)$$



Gambar 4. Model persediaan dengan pertimbangan masa kadaluwarsa dan unit diskon dimana bahan dibeli melebihi kebutuhan pada kasus *lost-sales* (atas) dan *backorder* (bawah)

Penyelesaian permasalahan persediaan persediaan dengan mempertimbangkan masa kadaluwarsa pada kasus *lost-sales* dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut ini (harga yang digunakan adalah $P1_i$):

1. Menghitung Ts_i^* dengan persamaan (2). Apabila $Ts_i^* > T1$, ubahlah Ts_i^* dengan $T1$ dan hitung Q^* dengan persamaan (3). Beberapa kondisi yang perlu diperhatikan pada Q^* adalah jika:
 - a. Q_i^* berada di bawah *price-break*, lanjut ke langkah 2.
 - b. Q_i^* berada dalam interval *price-break*, hitunglah Tc_i^* dengan persamaan (1) dan lanjut ke langkah 3.
 - c. Q_i^* berada di atas *price-break*, tidak ada solusi yang valid.
2. Menghitung Ts_i^* dengan persamaan (3) dimana Q adalah batas bawah *price-break*, apabila $Ts_i^* > T1$, ubahlah Ts_i^* dengan $T1$, dan simpan batas bawah *price-break* sebagai Q_i^* , kemudian hitunglah Tc_i^* dengan persamaan (12).
3. Membandingkan nilai Tc_i^* dengan Tc^* , jika $Tc_i^* < Tc^*$, simpan Tc_i^* sebagai Tc^* , simpan Ts_i^* sebagai Ts^* , dan simpan Q_i^* sebagai Q^* . Apabila belum semua *price-break* i telah dihitung solusinya, kembali ke langkah 1.

Penyelesaian pada kasus *backorder* dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut (harga yang digunakan adalah $P1_i$):

1. Menghitung Ts_i^* dengan persamaan (7) dan Tb dengan menggunakan persamaan (5) dan (6). Apabila $Tb \leq T1$, lanjut ke langkah 2. Lainnya, lanjut ke langkah 4.
2. Menghitung Q_i^* dengan persamaan (3). Jika Q_i^* berada dalam interval *price-break*, nilai Tc_i^* dan M_i^* dihitung dengan persamaan (4) dan (5) kemudian lanjutkan ke langkah 5. Jika Q_i^* berada di atas *price-break*, tidak ada solusi valid. Sedangkan bila Q_i^* berada di bawah *price-break*, lanjut ke langkah 3.
3. Menghitung Ts_i^* dengan persamaan (3) dimana Q adalah batas bawah interval *price-break*. Menghitung Tb dengan menggunakan persamaan (5) & (6). Apabila $Tb \leq T1$, jadikan Q sebagai Q_i^* dan hitung nilai Tc_i^* dan M_i^* dengan persamaan (4) dan (5) lalu lanjutkan ke langkah 5. Sebaliknya, apabila $Tb > T1$, lanjut ke langkah 5.
4. Menghitung Ts_i^* dengan persamaan (11). Apabila $Ts_i^* < T1$, maka $Ts^* = T1$. Hitung Q_i^* dengan persamaan (3), apabila Q_i^* berada dalam interval *price-break*, hitung nilai Tc_i^* dengan persamaan (10), dan M_i^* dengan persamaan (5), lanjut ke langkah 6. Jika Q_i^* berada di atas *price-break*, tidak ada solusi valid, bila Q_i^* berada di bawah *price-break*, lanjut ke langkah 5.
5. Menghitung Ts_i^* dengan persamaan (14) dimana Q adalah batas bawah interval *price-*

break. Apabila $Ts_i^* < T1$, maka $Ts^* = T1$. Jadikan Q sebagai Q_i^* , hitung nilai Tc_i^* dengan persamaan (13) dan M_i^* dengan persamaan (5) dan (6).

6. Membandingkan nilai Tc_i^* dengan Tc^* , jika $Tc_i^* < Tc^*$, simpan Tc_i^* sebagai Tc^* , simpan Ts_i^* sebagai Ts^* , dan simpan Q_i^* sebagai Q^* . Apabila belum semua *price-break* i telah dihitung solusinya, kembali ke langkah 1.

EOQ *Multi Item* dengan Mempertimbangkan Masa Kadaluwarsa dan Unit Diskon

Berikut ini adalah total biaya persediaan untuk model EOQ *multi item* (Djunaedi [2]):

$$Tc = \frac{S}{Ts} + \sum_{j=1}^n \left(P2_j D + \frac{D_j Ts}{2} P2_j H \right) \quad (15)$$

dengan t optimal sebesar:

$$Ts^* = \sqrt{\frac{2S}{\sum_{j=1}^n (D_j P2_j H)}} \quad (16)$$

dimana Q_j bernilai:

$$Q_j = D_j Ts \quad (17)$$

Total biaya EOQ *multi item* for *backorder* adalah:

$$Tc = \frac{S}{Ts} + \sum_{j=1}^n \left(P2_j D_j + \frac{D_j Ts \left(\frac{Cb_j}{P2_j H + Cb_j} \right)^2}{2} P_j H + \frac{D_j Ts \left(\frac{P_j H}{P2_j H + Cb_j} \right)^2}{2} Cb_j \right) \quad (18)$$

dan pada kasus *backorder* M optimal bernilai:

$$M_j^* = Q_j^* \frac{Cb_j}{P2_j H + Cb_j} \quad (19)$$

dan Tb bernilai:

$$Tb_j = Ts \frac{M_j}{Q_j} \quad (20)$$

dimana

$$Ts^* = \sqrt{\frac{2S}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{D_j P2_j H Cb_j}{P2_j H + Cb_j} \right)}} \quad (21)$$

Bilamana terdapat kadaluwarsa, kasus *backorder* akan lebih baik bila besarnya maksimum persediaan (M) sebesar jumlah permintaan selama $T1$ sehingga, total biaya persediaan menjadi:

$$Tc_k = \frac{S}{Ts} + \sum_{j=1}^n \left(P_{jk} D + P_{jk} H D_j \frac{(Tk_j - T1)^2}{2Ts} + \frac{Cb_j D_j}{2} \left(Ts - 2(Tk_j - T1) + \frac{(Tk_j - T1)^2}{Ts} \right) \right) \quad (22)$$

dimana

$$Ts_k^* = \sqrt{\frac{2 \left(S + \sum_{j=1}^n \left(\frac{P_{jk} H D_j}{2} (Tk_j - T1)^2 + \frac{Cb_j D_j}{2} (Tk_j - T1)^2 \right) \right)}{\sum_{j=1}^n Cb_j D_j}} \quad (23)$$

Apabila waktu kadaluwarsa tiap bahan berbeda, maka solusi dapat dihasilkan dengan simulasi. Sementara apabila masa kadaluwarsanya sama, maka solusi optimal dapat dihasilkan dengan model matematis.

Persediaan *multi item* dengan mempertimbangkan kadaluwarsa dan unit diskon pada kasus *lost-sales* dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut ini:

1. Menghitung nilai T_{sk}^* dengan persamaan (16). Apabila $T_{sk}^* > T1$, ubah $T_{sk}^* = T1$.
2. Menghitung setiap Q_{jk}^* dengan persamaan (17) dan membandingkannya dengan interval *price-break* pada kombinasi *price-break*. Apabila semua Q_{jk}^* berada dalam *price-break* maka solusi *valid*, kemudian hitunglah T_{ck}^* dengan persamaan (15). Sebaliknya, jika Q_{jk}^* berada di luar *price-break* maka solusi yang dihasilkan tidak valid.
3. Membandingkan nilai T_{ck}^* dengan Tc^* . Jika $T_{ck}^* < Tc^*$ maka simpanlah T_{ck}^* sebagai Tc^* , T_{sk}^* sebagai Ts^* , dan setiap Q_{jk}^* sebagai Q_j^* . Apabila belum semua kombinasi *price-break* dihitung solusinya, kembali ke langkah 1.

Penyelesaian pada kasus *backorder* dapat dilakukan dengan tahapan sebagai berikut:

1. Menghitung nilai T_{sk}^* dengan persamaan (21) dan Tb_j dengan persamaan (19), dan (20). Apabila semua $Tb_j \leq T1$, lanjut ke langkah 2. Lainnya, lanjut ke langkah 3.
2. Hitunglah setiap Q_{jk}^* dengan persamaan (17) dan membandingkannya dengan interval *price-break* pada kombinasi *price-break*. Apabila semua Q_{jk}^* berada dalam *price-break* maka solusi *valid*. Kemudian itunglah T_{ck}^* dan M_{jk}^* dengan persamaan (18) dan persamaan (19). Sedangkan jika Q_{jk}^* berada di luar *price-break* maka solusi tidak *valid* dan lanjut ke langkah 4.
3. Menghitung nilai T_{sk}^* dengan persamaan (23). Apabila $T_{sk}^* < T1$, maka tetapkan $T_{sk}^* = T1$. Hitunglah setiap Q_{jk}^* dengan persamaan (17) dan membandingkannya dengan interval *price-break* pada kombinasi *price-break*. Apabila semua Q_{jk}^* berada dalam *price-break* maka solusi valid, hitunglah T_{ck}^* dengan persamaan (22) dan M_{jk}^* dengan persamaan (19), sebaliknya, solusi tidak *valid*.
4. Membandingkan nilai T_{ck}^* dengan Tc^* , jika $T_{ck}^* < Tc^*$, simpanlah T_{ck}^* sebagai Tc^* , T_{sk}^* sebagai Ts^* , setiap Q_{jk}^* sebagai Q_j^* , dan setiap M_{jk}^* sebagai M_j^* . Kembali ke langkah 1 jika belum semua kombinasi *price-break* dihitung solusinya.

Beberapa hal yang menjadi kelemahan pada langkah-langkah penyelesaian ini adalah tidak dapat terakomodasinya faktor diskon dan adanya asumsi masa kadaluwarsa yang sama untuk semua jenis bahan. Penyelesaian persediaan dengan kondisi

setiap bahan memiliki masa kadaluwarsa yang berbeda ataupun diskon lebih diperhitungkan akan lebih mudah dan efisien diselesaikan dengan menggunakan simulasi.

EOQ *Multi Item* dengan Mempertimbangkan Masa Kadaluwarsa dan Unit Diskon pada Non-Konstan Demand

Pada penelitian ini pengembangan model EOQ yang mempertimbangkan masa kadaluwarsa dan unit diskon untuk kondisi *multi item* diselesaikan melalui simulasi dengan menggunakan prinsip *periodic review*. *Periodic review* merupakan salah satu metode pemenuhan persediaan bahan baku yang dapat digunakan untuk permintaan yang bersifat probabilistik. Konsep *periodic review* ini bekerja dengan melakukan pemeriksaan persediaan bahan baku tiap akhir periode dan memutuskan berapa jumlah bahan baku yang harus dibeli agar dapat memenuhi permintaan. Besarnya maksimum persediaan di gudang harus dapat memenuhi permintaan selama periode pengecekan dan *leadtime* pemesanan.

Simulasi dilakukan dengan menentukan tingkat persediaan tiap siklus pemesanan dan menghitung biaya per siklus selama siklus, sebelum dikonversi menjadi biaya tahunan. Biaya siklus memiliki persamaan yang berbeda-beda bergantung pada kondisi siklus tersebut dalam simulasi. Simulasi dilakukan dengan menggunakan algoritma genetika.

Berikut perhitungan biaya per siklus untuk kasus *lost-sales* berdasarkan kondisi siklus:

$$(Ts < T1 ; Q_{e_{t-1}} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} \geq Q_{e_{t-1}} ; Q_{e_t} \geq 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{2(Q_{e_{j(t-1)}}+Q_{jt})-D_{jt}}{2} Ts \tag{24}$$

$$Ts < T1 ; Q_{e_{t-1}} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} < Q_{e_{t-1}} ; Q_{e_t} \geq 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} - (Q_{e_{j(t-1)}} - D_{jt} \frac{T1j-Ts}{Ts})J_j +$$

$$P_{ij}H \left(\frac{2Q_{e_{j(t-1)}}+2Q_{jt}-D_{jt} \frac{T1j-Ts}{Ts}}{2} (T1j - Ts) + \right.$$

$$\left. \frac{2Q_{jt}-D_{jt} \frac{2Ts-T1j}{Ts}}{2} (2Ts - T1j) \right) \tag{25}$$

$$(Ts < T1 ; Q_{e_{t-1}} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} \geq Q_{e_{t-1}} ; Q_{e_t} < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{(Q_{e_{j(t-1)}}+Q_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts +$$

$$Cl_j(D_{jt}-Q_{e_{j(t-1)}} - Q_{jt}) \tag{26}$$

$$(Ts < T1 ; Q_{e_{t-1}} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} < Q_{e_{t-1}} ; Q_{e_t} < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} - (Q_{e_{j(t-1)}} - D_{jt} \frac{T1j-Ts}{Ts})J_j +$$

$$P_{ij}H \left(\frac{2Q_{e_{j(t-1)}}+2Q_{jt}-D_{jt} \frac{T1j-Ts}{Ts}}{2} (T1j - Ts) + \frac{Q_{jt}^2}{2D_{jt}} Ts) + \right.$$

$$C_{ij}(D_{jt} \frac{2Ts-T1j}{Ts} - Q_{jt}) \tag{27}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} \leq 0 ; Qe_t \geq 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{2Q_{jt}-D_{jt}}{2} Ts \tag{28}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} \leq 0 ; Qe_t < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{Q_{jt}^2}{2D_{jt}} Ts + Cl_j(D_{jt} - Q_{jt}) \tag{29}$$

$$(Ts \geq T1 ; D_t \geq Q_t).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{Q_{jt}^2}{2D_{jt}} Ts + Cl_j(D_{jt} - Q_{jt}) \tag{30}$$

$$(Ts \geq T1 ; D_t < Q_t).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} - \left(Q_{jt} - D_{jt} \frac{T1_j}{Ts} \right) J_j + P_{ij}H \frac{2Q_{jt}-D_{jt} \frac{T1_j}{Ts}}{2} T1_j + Cl_j D_{jt} \frac{T_s - T1_j}{T_s} \tag{31}$$

Persamaan untuk kasus *backorder* berdasarkan kondisi siklus adalah:

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} \geq Qe_{t-1} ; Qe_t \geq 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{2(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})-D_{jt}}{2} Ts \tag{32}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} < Qe_{t-1} ; Qe_t \geq 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} - \left(Qe_{j(t-1)} - D_{jt} \frac{T1-Ts}{Ts} \right) J_j + P_{ij}H \left(\frac{2Qe_{j(t-1)}+2Q_{jt}-D_{jt} \frac{T1-Ts}{Ts}}{2} (T1_j - Ts) + \frac{2Q_{jt}-D_{jt} \frac{2Ts-T1_j}{Ts}}{2} (2Ts - T1_j) \right) \tag{33}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} \geq Qe_{t-1} ; Qe_t < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts + Cb_j \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt}-D_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts \tag{34}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} > 0 ; D_t \frac{T1-Ts}{Ts} < Qe_{t-1} ; Qe_t < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts + Cb_j \frac{\left(D_{jt} \frac{2Ts-T1_j}{Ts} - Q_{jt} \right)^2}{2D_{jt}} Ts \tag{35}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} \leq 0 ; Qe_t \geq 0)$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{2(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})-D_{jt}}{2} Ts \tag{36}$$

$$(Ts < T1 ; Qe_{t-1} \leq 0 ; Qe_t < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts + Cb_j \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt}-D_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts \tag{37}$$

$$(Ts < T1 ; Q_t + Qe_{t-1} < 0)$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + Cb_j \frac{-2Qe_{j(t-1)}-Q_{jt}+D_{jt}}{2} Ts \tag{38}$$

$$(Ts \geq T1 ; D_t \geq Q_t).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + P_{ij}H \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts + Cb_j \frac{(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt}-D_{jt})^2}{2D_{jt}} Ts \tag{39}$$

$$(Ts \geq T1 ; D_t < Q_t).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} - \left(Qe_{j(t-1)} + Q_{jt} - D_{jt} \frac{T1_j}{Ts} \right) J_j + P_{ij}H \frac{2(Qe_{j(t-1)}+Q_{jt})-D_{jt} \frac{T1_j}{Ts}}{2} T1_j + Cb_j \frac{D_{jt}(Ts-T1_j)^2}{2t} \tag{40}$$

$$(Ts \geq T1 ; Q_t + Qe_{t-1} < 0).$$

$$Cc_{jt} = Q_{jt}P_{ij} + Cb_j \frac{-2Qe_{j(t-1)}-Q_{jt}+D_{jt}}{2} Ts \tag{41}$$

Rumus biaya persediaan tahunan adalah:

$$TC = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^n \frac{1}{o} \sum_{t=1}^o Cc_{jt} \tag{42}$$

Hasil dan Pembahasan

Skenario yang dilakukan pada simulasi ini adalah jenis *item* yang dipesan sebanyak tiga, permintaan didapatkan dengan membangkitkan bilangan random yang berdistribusi normal, dan *leadtime* pemesanan sebesar 26 hari. Semua komponen biaya, diskon serta harga jual barang kadaluwarsa untuk tiap jenis *item* berbeda-beda, kecuali biaya pemesanan. Detail data yang digunakan pada simulasi ini dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2. Pada tiap kasus, simulasi dijalankan untuk 1000 siklus.

Hasil simulasi untuk kasus *lost-sales* adalah lama selang waktu siklus sebesar 48,75 hari dengan maksimum persediaan untuk *item* A,B, dan C sebesar 108,5, 181,1, dan 292,3. Ekspektasi total biaya persediaan untuk kasus *lost-sales* adalah 35.209.630. Pada kasus *backorder* selang waktu siklus sebesar 101 hari dengan maksimum persediaan *item* A, B, dan C adalah 111,4, 185,15, 286,6. Ekspektasi total biaya persediaan pada kasus *backorder* adalah 30.591.066.

Tabel 1. Data skenario simulasi

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
A	500	50	92	15000	5000			5000
B	800	80	100	12000	4000	26	5%	4000
C	1250	125	97	21000	7000			7000

- X1 : *item*
 - X2 : *mean demand* tahunan
 - X3 : *stdev demand* tahunan
 - X4 : waktu kadaluwarsa (hari)
 - X5 : biaya *lost-sale* (per *item*)
 - X6 : biaya *backorder* (per *item* per tahun)
 - X7 : *lead time* (hari)
 - X8 : *holding rate* (tahun)
 - X9 : harga jual kadaluwarsa(per *item*)
- Ordering cost** untuk setiap *item* 100000

Tabel 2. Data diskon tiap *item*

<i>Item</i>	<i>Interval price break</i>	Harga beli (per <i>item</i>)
A	<= 115	11500
	> 115	10000
B	<= 175	9500
	> 175	8000
C	<= 250	15000
	> 250	14000

Analisa Sensitivitas Kasus *Lost-sales*

Analisa sensitivitas pada kasus *lost-sales* dilakukan dengan melakukan perubahan biaya simpan, biaya *lost-sales*, harga jual kadaluwarsa, dan harga jual. Analisa sensitivitas dijalankan untuk melihat seberapa besar pengaruh perubahan parameter terhadap total biaya persediaan. Hasil simulasi menunjukkan perubahan biaya simpan hingga 40% tidak memberikan pengaruh terhadap variabel keputusan selang waktu siklus (T_s) namun berpengaruh terhadap besarnya maksimum persediaan (M).

Perubahan harga jual bahan kadaluwarsa sebesar 20% maupun 40% menyebabkan perubahan pada keputusan selang waktu siklus pemesanan (T_s), terutama saat harga jual naik hingga 40%. Perubahan harga jual kadaluwarsa juga menyebabkan perubahan pada keputusan besarnya maksimum persediaan (M_j), dimana maksimum persediaan tiap *item* semakin besar seiring meningkatnya harga jual bahan kadaluwarsa. Hal ini disebabkan dengan semakin naiknya harga jual bahan kadaluwarsa mengurangi kerugian akibat kadaluwarsa. Oleh karenanya pada kondisi ini bahan dapat dibeli lebih banyak untuk mengurangi kemungkinan *lost-sales* meskipun kemungkinan kadaluwarsa meningkat. Peningkatan jumlah barang yang dipesan berakibat pada naiknya jumlah persediaan dan kadaluwarsa, namun menurunkan *lost-sales*. Perubahan biaya *lost-sales* sebesar 20% maupun 40% menyebabkan perubahan pada variabel keputusan. Semakin besar biaya *lost-sales* maka semakin kecil selang waktu siklus (T_s). Maksimum persediaan (M_j) semakin besar seiring dengan semakin besarnya biaya *lost-sales*.

Analisa Sensitivitas Kasus *Backorder*

Perubahan biaya simpan hingga 40% tidak memberikan pengaruh terhadap variabel keputusan yang diambil untuk mendapatkan total biaya persediaan minimum. Hal ini dapat dilihat dari besarnya selang waktu siklus dan persediaan maksimum yang tidak membentuk pola seiring berubahnya biaya simpan.

Perubahan harga jual bahan kadaluwarsa sebesar 20% maupun 40% juga tidak menyebabkan perubahan pada variabel keputusan selang waktu siklus pemesanan namun menyebabkan perubahan pada maksimum persediaan (M_j). Nilai M_j semakin besar seiring meningkatnya harga jual bahan kadaluwarsa. Hal ini disebabkan semakin naiknya harga jual bahan kadaluwarsa mengurangi kerugian akibat kadaluwarsa. Peningkatan pemesanan berakibat pada naiknya jumlah persediaan dan kadaluwarsa, namun menurunkan *backorder*.

Perubahan biaya *backorder* menyebabkan perubahan pada variabel keputusan. Semakin besar biaya *backorder* menyebabkan semakin kecilnya selang waktu siklus (T_s) dan semakin besarnya maksimum persediaan (M_j). Hal ini disebabkan semakin naiknya biaya *backorder* menyebabkan *backorder* lebih baik jika semakin sedikit. Semakin besar waktu kadaluwarsa, waktu siklus optimal akan semakin besar hingga sampai pada titik optimal.

Simpulan

Pada kasus *backorder* untuk *single item* didapatkan bahwa besar maksimum persediaan akan menghasilkan solusi yang lebih baik jika disesuaikan dengan jumlah permintaan selama waktu efektif dari bahan datang hingga waktu kadaluwarsa. Pengembangan model persediaan *multi item* dengan mempertimbangkan model untuk kasus *lost-sales* maksimum persediaan dipengaruhi oleh biaya simpan, harga jual bahan kadaluwarsa, dan biaya *lost-sales*. Selang waktu siklus untuk kasus *lost-sales* hanya dipengaruhi oleh harga jual bahan kadaluwarsa dan biaya *lost-sales*. Pada kasus *backorder* persediaan *multi item* ini besarnya persediaan maksimum dipengaruhi harga jual bahan kadaluwarsa dan biaya *backorder*. Selang waktu siklus hanya dipengaruhi oleh biaya *backorder*.

Daftar Pustaka

1. Bramorski T., Determining Discounts for Perishable Inventory, *Journal of Business & Economics Research*, 6(1), 2008, pp. 51-58.
2. Djunaedi, M., Nandiroh, S., dan Marzuki, I. O., Pengaruh Perencanaan Pembelian Bahan Baku dengan Model EOQ untuk Multi Item dengan All Unit Discount, *Jurnal Ilmiah Teknik Industri*, 4(2), 2005, pp. 83-89.
3. Elsayed, A., dan Boucher, T. O., *Analysis and Control of Production Systems*, 2nd. Edition, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1994.
4. Hsu, P. H., Optimal Ordering Policy for Fast Deteriorating Items, *African Journal of Business Management*, 6(30), 2012, pp. 8837-8852.
5. Hsu, P. H., Wee H. M., and Teng H. M., Optimal Lot Sizing for Deteriorating Items with Expiration Date, *Journal of Information & Optimization Sciences*, 27(2), 2006, pp. 271-286.
6. Indrianti, N., Ming. T., dan Toha, I. S., Model Perencanaan Kebutuhan Bahan dengan Mempertimbangkan Waktu Kadaluwarsa Bahan. *Jurnal Media Teknik*, 2, 2001, pp. 60-65
7. Limansyah, T., dan Lesmono, D., Model Persediaan Multi Item dengan Mempertimbangkan Faktor Kadaluwarsa dan Faktor All Unit

- Discount, *Jurnal Teknik Industri*, 13(2), 2011, pp. 87-94.
8. Muckstadt, J. A., and Sapra, A., *Principles of Inventory Management: When You are Down to Four, Order More*, New York: Springer, 2009.
 9. Panda, S., Saha, S., and Basu, M., *An EOQ Model for Perishable Products with Discounted Selling Price and Stock Dependent Demand*, New York: Springer, 2008.
 10. Prasetyo, H., Nugroho, M. T., dan Pujiarti, A. Pengembangan Model Persediaan Bahan Baku dengan Mempertimbangkan Waktu Kadaluwarsa dan Faktor Unit Diskon, *Jurnal Ilmiah Teknik Industri*, 4(3), 2006, pp. 108-115.
 11. Russel, R. S., and Taylor, B. W., *Operations Management: Focusing on Quality and Competitiveness in a Global Environment 5th Edition*, New Jersey: Prentice Hall, 2006.