

Pengantar METODE ELEMEN HINGGA UNTUK ANALISIS STRUKTUR

Teori, Perumusan, Implementasi
Komputer, dan Aplikasi

Metode Elemen Hingga (MEH) adalah metode perhitungan yang paling banyak dipakai saat ini untuk menyelesaikan masalah analisis struktur. Metode ini terkandung dalam banyak *software* komersial analisis struktur yang digunakan sehari-hari dalam pekerjaan desain para insinyur dalam bidang teknik sipil, teknik mesin, teknik aeronautika, teknik perkapalan, dan bidang-bidang teknik lainnya. Di lain pihak, bagi matematikawan terapan MEH merupakan metode numerik yang ampuh untuk menyelesaikan *boundary value problems* dalam ruang berdimensi dua dan tiga.

Buku ini bertujuan memperkenalkan berbagai aspek MEH secara lengkap, mulai dari teori model yang akan diselesaikan, perumusan MEH untuk menyelesaikan masalah model itu, implementasi komputer dengan menggunakan MATLAB, sampai dengan aplikasi MEH dengan program komputer yang dibuat sendiri. Karena tujuan buku ini adalah memperkenalkan MEH, model-model yang dibahas dipilih yang sederhana dan umum digunakan untuk memperkenalkan MEH dalam bidang teknik, yaitu model deformasi aksial batang dan model tegangan serta regangan bidang.

Buku ini dimaksudkan untuk menjadi buku teks bagi pembaca yang mempelajari MEH pertama kalinya. Untuk dapat mengikuti buku ini, pembaca diharapkan telah memiliki pengetahuan kalkulus dasar, matriks, persamaan diferensial, statika, dan mekanika bahan. Selain itu, buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa jurusan matematika aplikasi yang ingin mempelajari aplikasi MEH dalam bidang teknik. Buku ini juga cocok untuk insinyur praktik yang ingin menyegarkan kembali pemahaman dan prosedur dasar perhitungan MEH.



PT RAJAGRAFINDO PERSADA
Jl. Raya Leuwisunggal No. 112
Kel. Leuwisunggal, Kec. Tapos, Kota Depok 16956
Telp 021-84311162
Email: rajapers@rajagrafindo.co.id
www.rajagrafindo.co.id

RAJAWALI PERS
DIVISI BUKU PERGURUAN TINGGI

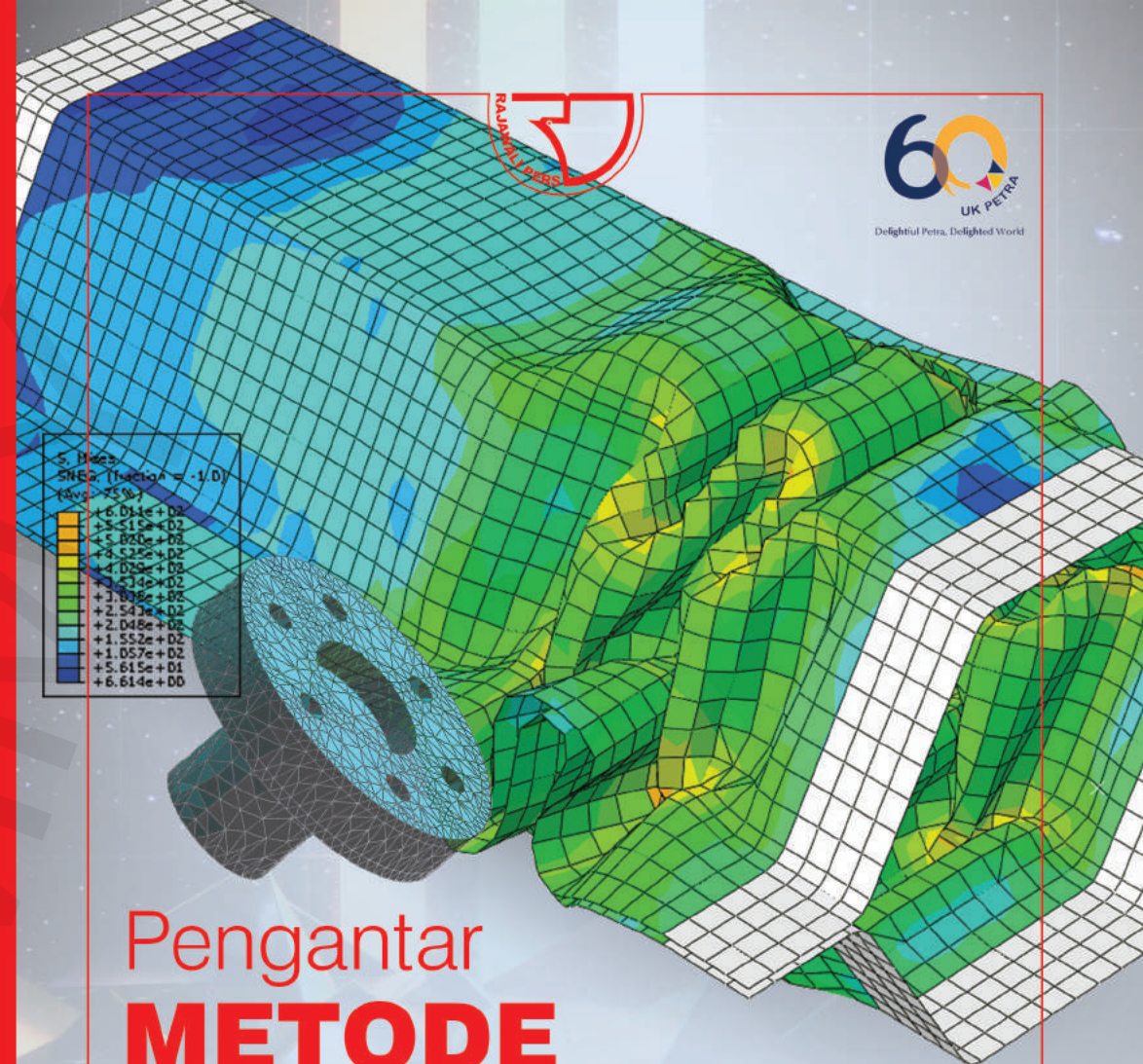


9 786232 319585



PENGANTAR
METODE ELEMEN HINGGA UNTUK ANALISIS STRUKTUR
Teori, Perumusan, Implementasi Komputer, dan Aplikasi

Wong Foek Tjong



Pengantar METODE ELEMEN HINGGA UNTUK ANALISIS STRUKTUR

Teori, Perumusan, Implementasi
Komputer, dan Aplikasi

Wong Foek Tjong

Pengantar

METODE ELEMEN HINGGA UNTUK ANALISIS STRUKTUR

Teori, Perumusan, Implementasi
Komputer, dan Aplikasi

DUNIA

Pengantar
**METODE
ELEMEN HINGGA
UNTUK ANALISIS STRUKTUR**

Teori, Perumusan, Implementasi
Komputer, dan Aplikasi

Wong Foek Tjong



RAJAWALI PERS
Divisi Buku Perguruan Tinggi
PT RajaGrafindo Persada
D E P O K

Perpustakaan Nasional: Katalog dalam terbitan (KDT)

Wong Foek Tjong.

Pengantar Metode Elemen Hingga untuk Analisis Struktur: Teori, Perumusan, Implementasi Komputer, dan Aplikasi/Wong Foek Tjong.

—Ed. 1—Cet. 1.—Depok: Rajawali Pers, 2021.

xxiv, 524 hlm. 23 cm

Bibliografi: ada di setiap bab

ISBN 978-623-231-958-5

Hak cipta 2021, pada penulis

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh isi buku ini dengan cara apa pun, termasuk dengan cara penggunaan mesin fotokopi, tanpa izin sah dari penerbit

2021.3088 RAJ

Wong Foek Tjong

***PENGANTAR METODE ELEMEN HINGGA UNTUK ANALISIS STRUKTUR
Teori, Perumusan, Implementasi Komputer, dan Aplikasi***

Cetakan ke-1, Juli 2021

Hak penerbitan pada PT RajaGrafindo Persada, Depok

Editor : Tim RGP

Setter : Jaenudin

Desain Cover : Tim Kreatif RGP

Dicetak di Rajawali Printing

PT RAJAGRAFINDO PERSADA

Anggota IKAPI

Kantor Pusat:

Jl. Raya Leuwininggung, No.112, Kel. Leuwininggung, Kec. Tapos, Kota Depok 16956

Telepon : (021) 84311162

E-mail : rajapers@rajagrafindo.co.id <http://www.rajagrafindo.co.id>

Perwakilan:

Jakarta-16956 Jl. Raya Leuwininggung No. 112, Kel. Leuwininggung, Kec. Tapos, Depok, Telp. (021) 84311162. **Bandung**-40243, Jl. H. Kurdi Timur No. 8 Komplek Kurdi, Telp. 022-5206202. **Yogyakarta**-Perum. Pondok Soragan Indah Blok A1, Jl. Soragan, Ngestiharjo, Kasihan, Bantul, Telp. 0274-625093. **Surabaya**-60118, Jl. Rungkut Harapan Blok A No. 09, Telp. 031-8700819. **Palembang**-30137, Jl. Macan Kumbang III No. 10/4459 RT 78 Kel. Demang Lebar Daun, Telp. 0711-445062. **Pekanbaru**-28294, Perum De' Diandra Land Blok C 1 No. 1, Jl. Kartama Marpoyan Damai, Telp. 0761-65807. **Medan**-20144, Jl. Eka Rasmi Gg. Eka Rossa No. 3A Blok A Komplek Johor Residence Kec. Medan Johor, Telp. 061-7871546. **Makassar**-90221, Jl. Sultan Alauddin Komp. Bumi Permata Hijau Bumi 14 Blok A14 No. 3, Telp. 0411-861618. **Banjarmasin**-70114, Jl. Bali No. 31 Rt 05, Telp. 0511-3352060. **Bali**, Jl. Imam Bonjol Gg 100/V No. 2, Denpasar Telp. (0361) 8607995. **Bandar Lampung**-35115, Perum. Bilabong Jaya Block B8 No. 3 Susunan Baru, Langkapura, Hp. 081299047094.



PRAKATA

Metode Elemen Hingga (MEH) adalah metode perhitungan yang paling banyak dipakai saat ini untuk menyelesaikan masalah analisis struktur. Metode ini terkandung dalam banyak *software* komersial analisis struktur yang digunakan sehari-hari dalam pekerjaan desain para insinyur dalam bidang teknik sipil, teknik mesin, teknik aeronautika, teknik perkapalan, dan bidang-bidang teknik lainnya. Di lain pihak, bagi matematikawan terapan MEH merupakan metode numerik yang ampuh untuk menyelesaikan *boundary value problems* dalam ruang berdimensi dua dan tiga.

Buku ini bertujuan memperkenalkan berbagai aspek MEH secara lengkap, mulai dari teori model yang akan diselesaikan, perumusan MEH untuk menyelesaikan masalah model itu, implementasi komputer dengan menggunakan MATLAB, sampai dengan aplikasi MEH dengan program komputer yang dibuat. Karena tujuan buku ini adalah memperkenalkan MEH, model-model yang dibahas dipilih yang sederhana dan umum digunakan untuk memperkenalkan MEH dalam bidang teknik, yaitu model deformasi aksial batang dan model tegangan serta regangan bidang.

Buku ini dimaksudkan untuk menjadi buku teks bagi pembaca yang mempelajari MEH pertama kalinya. Untuk dapat mengikuti buku ini, pembaca diharapkan telah memiliki pengetahuan kalkulus dasar, matriks, persamaan diferensial, statika, dan mekanika bahan. Kemampuan menggunakan MATLAB bisa dipelajari sambil jalan. Buku

ini juga cocok untuk insinyur praktik yang ingin menyegarkan kembali pemahaman mengenai MEH. Selain itu, buku ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa jurusan matematika aplikasi yang ingin mempelajari aplikasi MEH dalam bidang teknik.

Bab 1 mulai dengan memperkenalkan MEH secara menyeluruh. Setelah membaca bab ini, pembaca diharapkan memiliki gambaran umum apa itu MEH dan termotivasi untuk mempelajarinya lebih lanjut. Setelah itu Bagian I buku ini membahas langkah-langkah perhitungan MEH yang ditujukan untuk implementasi komputer, yaitu metode kekakuan langsung (*Direct Stiffness Method*, disingkat DSM). Pembahasan DSM diberikan dalam konteks masalah sistem pegas (Bab 2), struktur rangka batang dalam ruang 1D dan 2D (Bab 3), dan rangka batang dalam ruang 3D (Bab 4). Pembahasan DSM di dalam Bab 2 s.d 4 ini ditekankan kepada prosedur perhitungan dan implementasi komputer. Perumusan elemen-elemen hingga dilakukan secara sederhana berdasarkan penerapan langsung hukum-hukum fisika.

Prosedur perhitungan MEH dan implementasi komputernya (Bagian I) diperkenalkan di awal sebelum mempelajari perumusan formal MEH (Bagian II dan III) dengan tujuan supaya pembaca, khususnya yang berlatar belakang pendidikan bidang teknik, dapat lebih siap untuk mempelajari perumusan MEH di bagian-bagian buku ini selanjutnya. Namun, bagi pembaca yang berlatar belakang pendidikan matematika terapan, mungkin akan lebih nyaman untuk mempelajari terlebih dahulu perumusan MEH dalam ruang 1D di Bagian II buku ini kemudian mempelajari Bagian I.

Bagian III buku ini membahas MEH untuk masalah dalam ruang dua dimensi. Masalah yang dipilih adalah model tegangan/regangan bidang. Bagian ini dimulai dengan pembahasan model tegangan/regangan bidang secara detail (Bab 6). Selanjutnya, penyelesaian masalah tegangan/regangan bidang dengan menggunakan elemen dua dimensi yang paling sederhana, yaitu elemen segitiga regangan konstan (CST), dibahas dalam Bab 7. Setiap bab buku ini disertai dengan contoh-contoh soal yang memadai dan MATLAB *codes* yang lengkap untuk mengaplikasikan MEH (program dapat diunduh secara gratis dari http://bit.ly/Pengantar_MEH_untuk_Analisis_Struktur_WongFT).

Buku ini ditulis berdasarkan pengalaman penulis mengajar dan meneliti dalam bidang MEH selama lebih dari 20 tahun di Program

Studi Teknik Sipil, Universitas Kristen Petra, Surabaya. Program-program komputer MATLAB yang disertakan dalam buku ini merupakan pengembangan program-program yang biasa penulis pakai dalam proses belajar-mengajar. Soal-soal yang disajikan pada setiap bab diambil dari berbagai soal ujian dan tugas-tugas dalam kelas MEH.

Penulis berterima kasih kepada Hidayat Syamsoeyadi, mantan mahasiswa bimbingan skripsi penulis di tahun 2009, untuk kontribusinya dalam membantu penulisan beberapa bagian dari draf Bab 3. Terima kasih untuk Welly Pontjoharyo, rekan penulis dalam mengajar MEH di Universitas Kristen Petra, yang telah berkontribusi dalam pembuatan beberapa soal dalam buku ini.

Buku ini didedikasikan untuk Papa (alm.) dan Mama. Tanpa kerja keras dan kasih sayang mereka tidak mungkin penulis dapat mencapai keadaan seperti sekarang. Penulis juga berterima kasih kepada istri Zhu Shuiqing yang senantiasa mengingatkan untuk segera menyelesaikan buku ini. Segala puji, hormat kemuliaan bagi Tuhan.

Surabaya, 23 Februari 2021

Penulis

Wong Foek Tjong

DUNNY



DAFTAR ISI

PRAKATA	v
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR NOTASI	xv
BAB 1 PENGENALAN METODE ELEMEN HINGGA	1
1.1 Model Matematis Struktur	1
1.2 Metode Elemen Hingga	5
1.3 <i>Software</i> Metode Elemen Hingga	10
1.4 Contoh Aplikasi	11
1.5 Mengapa Perlu Mempelajari MEH?	15
1.6 Diskretisasi Model Kontinu	17
1.7 Prosedur Perhitungan MEH—Metode Kekakuan Langsung	21
1.8 Ringkasan	23
Daftar Referensi	24
Soal-soal	25
BAGIAN I: METODE KEKAKUAN LANGSUNG DAN IMPLEMENTASI KOMPUTER	29
BAB 2 RANGKAIAN PEGAS DAN ELEMEN PEGAS	31
2.1 Elemen Pegas Linier	32

2.2	Metode Kekakuan Langsung untuk Rangkaian Pegas	35
2.3	Perakitan Persamaan Kekakuan Struktur Secara Sistematis	40
2.4	Penyelesaian Persamaan Kekakuan Struktur	50
2.5	Perhitungan Gaya-gaya dalam Pegas	55
2.6	Implementasi Metode Elemen Hingga—Program 1: MEH untuk Masalah Sistem Pegas-Benda Tegar	57
2.7	Metode Kekakuan Langsung Alternatif	65
2.8	Contoh Soal	75
2.9	Program 2: MEH untuk Masalah Sistem Pegas-Benda Tegar dengan DSM-a	83
2.10	Ringkasan	88
	Daftar Referensi	90
	Soal-soal	91
	Lampiran 2.1 Matlab <i>Code</i> Program 1: MEH untuk Masalah Sistem Pegas-Benda Tegar dengan DSM-p	94
	Lampiran 2.2 Matlab <i>Code</i> Program 2: MEH untuk Masalah Sistem Pegas-Benda Tegar dengan DSM-a	99

BAB 3	STRUKTUR DAN ELEMEN RANGKA BATANG 1D DAN 2D	107
3.1	Elemen Batang	107
3.2	Batang Berdeformasi Aksial dalam Ruang 1D	110
3.3	Struktur dan Elemen Rangka Batang Bidang	121
3.4	Metode Kekakuan Langsung untuk Rangka Batang Bidang	129
3.5	Metode Kekakuan Langsung Alternatif untuk Rangka Batang Bidang	137
3.6	Program 3: MEH untuk Rangka Batang Bidang dengan DSM-a	144
3.7	Contoh Soal Rangka Batang Bidang	152
3.8	Ringkasan	163

Daftar Referensi	166
Soal-soal	166
Lampiran 3.1 Matlab <i>Code</i> Program 3: MEH untuk Rangka Batang Bidang dengan DSM-a	169
BAB 4 STRUKTUR DAN ELEMEN RANGKA BATANG 3D	177
4.1 Struktur dan Elemen Rangka Batang Ruang	177
4.2 Metode Kekakuan Langsung untuk Rangka Batang Ruang	183
4.3 Program 4: MEH untuk Rangka Batang Umum dengan DSM-a	193
4.4 Contoh Soal	199
4.5 Interpretasi Matriks Kekakuan	210
4.6 Sifat-sifat Matriks Kekakuan	221
4.7 Pemeriksaan Stabilitas Struktur	226
4.8 Ringkasan	231
Daftar Referensi	232
Soal-soal	233
Lampiran 4.1 Matlab <i>Code</i> Program 4: MEH untuk Rangka Batang Umum dengan DSM-a	237
BAGIAN II: METODE ELEMEN HINGGA DALAM RUANG BERDIMENSI SATU	245
BAB 5 BATANG BERDEFORMASI AKSIAL DAN ELEMEN BATANG	247
5.1 Model Batang Berdeformasi Aksial	247
5.2 Contoh Soal Batang Berdeformasi Aksial	253
5.3 Energi Regangan	257
5.4 Contoh Soal Perhitungan Energi Regangan	260
5.5 Bentuk Kuat, Bentuk Lemah Persamaan Penentu dan Prinsip Perpindahan Virtual	266
5.6 Contoh Soal Prinsip Perpindahan Virtual	270
5.7 Perumusan Elemen Batang Berdeformasi Aksial dengan Persamaan Bentuk Lemah Global	272

5.8	Perumusan Elemen Batang Berdeformasi Aksial dengan Persamaan Bentuk Lemah Lokal	279
5.9	Matriks Kekakuan Elemen dan Gaya Nodal Ekuivalen Elemen	286
5.10	Perakitan Elemen-elemen Batang dan Penyelesaian Masalah Struktur Batang	293
5.11	Aplikasi Elemen Batang dalam Struktur Rangka Batang	302
5.12	Program 5: MEH untuk Rangka Batang Umum Termasuk Pengaruh Beban pada Elemen	309
5.13	Contoh Soal	318
5.14	Ringkasan	329
	Daftar Referensi	331
	Soal-soal	332
	Lampiran 5.1 Matlab Code Program 5: MEH untuk Rangka Batang Umum Termasuk Pengaruh Beban dalam Elemen	337

BAGIAN III: METODE ELEMEN HINGGA DALAM RUANG BERDIMENSI DUA 347

BAB 6 TEGANGAN BIDANG DAN REGANGAN BIDANG 349

6.1	Konsep Dasar Tegangan Bidang dan Regangan Bidang	349
6.2	Masalah Tegangan/Regangan Bidang	352
6.3	Persamaan Kinematik	357
6.4	Persamaan Bahan	365
6.5	Persamaan Keseimbangan	378
6.6	Kondisi Batas	380
6.7	Bentuk Kuat Persamaan Pengatur	385
6.8	Energi Regangan	387
6.9	Prinsip Perpindahan Virtual–Bentuk Lemah Persamaan Pengatur	390
6.10	Tegangan-tegangan Utama	393

6.11	Tegangan von Mises	397
6.12	Ringkasan	399
	Daftar Referensi	402
	Soal-soal	402
BAB 7	ELEMEN SEGITIGA REGANGAN KONSTAN (CST)	407
7.1	Diskretisasi dengan Elemen-elemen Segitiga	407
7.2	<i>Shape Functions</i> dalam Elemen CST	410
7.3	Perumusan Elemen CST dalam Bentuk Matriks	419
7.4	Komputasi dengan Menggunakan Koordinat Luas	430
7.5	Perakitan Elemen-elemen CST dan Penyelesaian Masalah Tegangan/Regangan Bidang	438
7.6	Program 6: MEH untuk Model Tegangan/Regangan Bidang dengan Elemen CST	452
7.7	Evaluasi Kinerja dan Aplikasi Elemen CST	460
7.8	Ringkasan	475
	Daftar Referensi	477
	Soal-soal	478
	Lampiran 7.1 Matlab <i>Code</i> Program 6: MEH untuk Model Tegangan/Regangan Bidang dengan Elemen CST	482
LAMPIRAN		495
BIODATA PENULIS		523

DUNNY

DAFTAR NOTASI

A	Indeks untuk nomor titik nodal struktur (DSM); luas penampang batang.
a	Indeks untuk nomor titik nodal elemen.
$\mathbf{B}$	Matriks yang menghubungkan antara regangan dan vektor perpindahan titik nodal.
$\mathbf{b}$	<i>Body force vector</i> , dalam satuan gaya per satuan volume.
$b_x; b_y$	Komponen <i>body force vector</i> dalam arah x ; dalam arah y .
C^e	Kosinus sudut orientasi θ^e elemen batang dalam ruang 2D.
C_X^e, C_Y^e, C_Z^e	Kosinus-kosinus arah elemen batang nomor e dalam ruang 3D terhadap sumbu-sumbu X, Y, Z global.
$\mathbf{D}$	Vektor perpindahan nodal struktur atau global, mengacu ke sistem koordinat global (struktur).
$\mathbf{D}_a$	Subvektor perpindahan nodal struktur yang aktif (untuk metode DSM-p).
D_A	Perpindahan titik nodal pada titik nodal A (Bab 5).
d_a	Komponen perpindahan titik nodal lokal a (Bab 5).
$\mathbf{D}^e$	Vektor perpindahan titik nodal elemen nomor e , mengacu ke sistem koordinat global (struktur). Superskrip e harus ditulis supaya tidak rancu dengan vektor perpindahan nodal struktur.

d^e	Vektor perpindahan titik nodal elemen nomor e , mengacu ke sistem koordinat lokal elemen. Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
D_I	Komponen vektor perpindahan ke- I dari suatu titik nodal struktur, mengacu ke sistem koordinat global (struktur).
D_i^e	Komponen vektor perpindahan ke- i dari suatu titik nodal elemen nomor e , mengacu ke sistem koordinat global (struktur). Superskrip e harus ditulis supaya tidak rancu dengan komponen vektor perpindahan nodal struktur.
d_i^e	Komponen vektor perpindahan ke- i dari suatu titik nodal elemen nomor e , mengacu ke sistem koordinat lokal elemen. Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
D_p	Subvektor perpindahan nodal struktur yang pasif (untuk DSM-p); vektor perpindahan nodal struktur yang sudah diketahui (untuk DSM-a).
$D_{pA,k}$	Komponen perpindahan titik nodal struktur nomor A untuk nomor arah komponen ke- k yang sudah diketahui (<i>prescribed displacement component</i>) (untuk metode DSM-a).
e	Indeks untuk nomor elemen.
E	Modulus elastisitas (modulus Young).
E	Matriks elastisitas pada hubungan tegangan-regangan untuk model tegangan/regangan bidang.
F	Vektor gaya nodal struktur atau global, mengacu ke sistem koordinat global (struktur).
F	Gaya aksial pada batang.
F_a	Subvektor gaya nodal struktur yang berpadanan dengan nomor persamaan yang aktif (untuk DSM-p); vektor gaya nodal struktur (untuk DSM-a).
F_A	Vektor gaya nodal struktur yang diberikan (beban terpusat).
$F_a^{(e)}$	Vektor gaya pada titik nodal elemen nomor e yang telah diperbesar ukurannya menjadi seukuran dengan vektor gaya nodal struktur, mengacu ke sistem koordinat global.
F_a^e	Vektor gaya pada titik nodal elemen nomor e , mengacu ke sistem koordinat global. Superskrip e harus ditulis supaya tidak rancu dengan vektor gaya nodal struktur.

$\mathbf{f}_a^e$	Vektor gaya pada titik nodal elemen nomor e (akibat reaksi dari titik-titik nodal struktur), mengacu ke sistem koordinat lokal elemen. Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
F_{AI}	Komponen vektor gaya ke- I yang diaplikasikan pada suatu titik nodal struktur, mengacu ke sistem koordinat global (struktur).
F_{ai}^e	Komponen vektor gaya ke- i yang bekerja pada suatu titik nodal elemen nomor e (berasal dari gaya reaksi titik nodal struktur), mengacu ke sistem koordinat global (struktur). Superskrip e harus ditulis supaya tidak rancu dengan komponen vektor gaya nodal struktur.
f_{ai}^e	Komponen vektor gaya ke- i yang bekerja pada suatu titik nodal elemen nomor e (berasal dari gaya reaksi titik nodal struktur), mengacu ke sistem koordinat lokal elemen. Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
$\mathbf{F}_p$	Subvektor gaya nodal struktur yang berpadanan dengan nomor persamaan yang pasif (untuk DSM-p); vektor gaya nodal struktur yang berpadanan dengan nomor persamaan yang pasif (untuk DSM-a).
$\mathbf{F}_p$	Vektor gaya nodal ekuivalen pada titik-titik nodal struktur akibat gaya aksial terdistribusi p .
$\mathbf{f}_p$	Vektor gaya nodal ekuivalen akibat beban aksial terdistribusi p .
f_{pa}	Komponen vektor gaya nodal ekuivalen akibat beban aksial terdistribusi p .
$\mathbf{F}_R$	Vektor gaya nodal struktur yang belum diketahui (reaksi perletakan).
$F_{RA,k}$	Komponen gaya reaksi pada titik nodal struktur nomor A untuk nomor arah komponen ke- k (untuk metode DSM-a).
F_{RI}	Komponen vektor gaya reaksi ke- I yang pada suatu titik nodal struktur, mengacu ke sistem koordinat global (struktur).
$\mathbf{F}_T$	Vektor gaya nodal ekuivalen pada titik-titik nodal struktur akibat perubahan temperatur T .

$\mathbf{f}_T$	Vektor gaya nodal ekuivalen akibat perubahan temperatur T .
f_{Ta}	Komponen vektor gaya nodal ekuivalen akibat perubahan temperatur T .
$\mathbf{F}_\Delta$	Vektor gaya nodal ekuivalen struktur akibat perpindahan titik-titik nodal yang diberikan (untuk metode DSM-a).
$\mathbf{F}_\Delta^e$	Vektor gaya nodal ekuivalen untuk elemen nomor e akibat perpindahan titik nodal, mengacu ke sistem koordinat global (struktur). Superskrip e harus ditulis supaya tidak rancu dengan vektor gaya nodal ekuivalen struktur. (untuk metode DSM-a).
$\mathbf{f}_\Delta^e$	Vektor gaya nodal ekuivalen untuk elemen nomor e akibat perpindahan titik nodal, mengacu ke sistem koordinat lokal elemen. Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis. (untuk metode DSM-a).
G	Modulus elastisitas dalam geser atau disingkat modulus geser.
$\mathbf{g}$	Vektor perpindahan yang diberikan (diketahui) pada kurva batas model dua dimensi benda.
$g_x; g_y$	Komponen perpindahan yang diberikan pada kurva batas dalam arah x ; dalam arah y .
h	Ketebalan model tegangan/regangan bidang. Untuk model regangan bidang, $h = 1$ satuan.
$\mathbf{I}$	Vektor basis satuan dalam arah sumbu global X .
$\mathbf{i}$	Vektor basis satuan dalam arah sumbu lokal x .
I	Indeks untuk nomor DOF struktur.
i	Indeks untuk nomor DOF elemen.
$\mathbf{J}$	vektor basis satuan dalam arah sumbu global Y .
$\mathbf{j}$	Vektor basis satuan dalam arah sumbu lokal y .
Jcode	<i>Joint code matrix</i> (atau <i>destination array</i>) untuk untuk DOF aktif (dalam DSM-a).
Jcode_p	<i>Joint code matrix</i> (atau <i>destination array</i>) untuk untuk DOF pasif (dalam DSM-a).
$\mathbf{k}$	Vektor basis satuan dalam arah sumbu lokal z .

K	Matriks kekakuan struktur atau global, mengacu ke sistem koordinat global (struktur); vektor basis satuan dalam arah sumbu global Z.
K^(e)	Matriks kekakuan elemen nomor <i>e</i> yang telah diperbesar ukurannya menjadi seukuran dengan matriks kekakuan struktur, mengacu ke sistem koordinat global.
K_{aa}	Submatriks kekakuan struktur yang berhubungan dengan nomor persamaan yang aktif dan DOF yang aktif (untuk metode DSM-p).
k_{ab}	Koefisien matriks kekakuan yang berpadanan dengan <i>shape function</i> titik nodal <i>a</i> dan <i>b</i> .
K_{ap}	Submatriks kekakuan struktur yang berhubungan dengan nomor persamaan yang aktif dan DOF yang pasif (untuk metode DSM-p).
K^e	Matriks kekakuan elemen nomor <i>e</i> , mengacu ke sistem koordinat global. Superskrip <i>e</i> harus ditulis supaya tidak rancu dengan matriks kekakuan struktur.
k^e	Matriks kekakuan elemen nomor <i>e</i> , mengacu ke sistem koordinat lokal elemen. Kadang-kadang superskrip <i>e</i> tidak ditulis.
K_{pa}	Submatriks kekakuan struktur yang berhubungan dengan nomor persamaan yang pasif dan DOF yang aktif (untuk metode DSM-p).
K_{pp}	Submatriks kekakuan struktur yang berhubungan dengan nomor persamaan yang pasif dan DOF yang pasif (untuk metode DSM-p).
k_s	Konstanta atau kekakuan pegas (Bab 2).
L	Panjang batang (elemen atau struktur).
L	Matriks komponen-komponen vektor normal satuan terhadap suatu permukaan batas.
Lnods	<i>Element node array</i> atau matriks konektivitas elemen.
M	Submatriks dari matriks kekakuan elemen batang dalam ruang 3D.
Mcode	<i>Member code matrix</i> , matriks kode elemen. Untuk DSM-a, Mcode hanya memberikan informasi kompatibilitas untuk DOF aktif saja.

Mcode_p	<i>Member code matrix</i> yang memberikan informasi kompartabilitas untuk DOF pasif (dalam DSM-a).
N	Gaya aksial dalam batang, disebut juga gaya normal.
N	Matriks <i>shape function</i> .
n	Orde matriks bujur sangkar (aljabar linier).
n	Vektor normal satuan terhadap suatu permukaan batas.
n_x, n_y	Komponen vektor normal satuan dalam arah x ; dalam arah y .
N_A	Fungsi basis yang berpadanan dengan titik nodal global A .
N_a	<i>Shape function</i> yang berpadanan dengan titik nodal nomor lokal a .
$Ndofn$	Jumlah derajat kebebasan untuk setiap titik nodal.
N^e	Gaya dalam pegas (Bab 2), gaya aksial dalam batang, disebut juga gaya normal (Bab 3-5), untuk elemen nomor e .
$Nelem$	Banyaknya elemen hingga dalam model struktur.
$Nevab$	Banyaknya variabel (DOF) elemen.
$Nnode$	Banyaknya titik nodal dalam elemen.
$Npoin$	Banyaknya titik nodal dalam model struktur.
$Npresc$	Jumlah perpindahan titik nodal yang nilainya diberikan (<i>prescribed</i>), jumlah DOF pasif.
$Nsvab$	Banyaknya variabel (DOF) struktur. Untuk DSM-p $Nsvab$ mencakup semua DOF, baik aktif maupun pasif. Untuk DSM-a hanya mencakup DOF aktif saja.
p	Gaya aksial terdistribusi pada batang.
P	Beban terpusat.
p_1, p_m, p_2	Nilai-nilai gaya aksial pada titik nodal 1 elemen, pada titik tengah elemen, dan pada titik nodal 2 elemen.
r	Rank matriks (aljabar linier).
S^e	Sinus sudut orientasi θ^e elemen batang dalam ruang 2D.
T	Perubahan temperatur.
T_1, T_m, T_2	Nilai-nilai perubahan temperatur pada titik nodal 1 elemen, pada titik tengah elemen, dan pada titik nodal 2 elemen.

T^e	Matriks transformasi dari vektor perpindahan atau vektor gaya elemen batang dari komponen-komponen global ke komponen-komponen lokal.
t	Vektor gaya traksi permukaan.
t_x, t_y	Komponen vektor gaya traksi dalam arah x ; dalam arah y .
U	Energi regangan dalam suatu sistem struktur.
u	Vektor perpindahan titik material.
u	Komponen perpindahan dalam arah x .
U_0	Kerapatan energi regangan, yaitu energi regangan per satuan volume.
U^e	Energi regangan dalam elemen e .
u^h	Fungsi pendekatan (<i>trial solution</i>) untuk perpindahan u .
v	Komponen perpindahan dalam arah y .
W	Kerja yang dilakukan gaya-gaya (luar).
w	<i>Weighting function</i> di dalam bentuk lemah persamaan pengatur.
	Komponen perpindahan dalam arah z .
X	Sumbu pertama koordinat global.
x	Komponen koordinat pertama.
x^e	Sumbu pertama koordinat lokal elemen e . Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
Y	Sumbu kedua koordinat global.
y^e	Sumbu kedua koordinat lokal elemen e . Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
Z	Sumbu ketiga koordinat global.
z^e	Sumbu ketiga koordinat lokal elemen e . Kadang-kadang superskrip e tidak ditulis.
α	Koefisien muai panjang.
γ_{xy}	Regangan geser dari benda antara permukaan yang sejajar dengan bidang x - z dan permukaan yang sejajar bidang y - z , dengan kata lain regangan geser (perubahan sudut) yang terjadi dalam bidang x - y .
γ_{xz}	Regangan geser dari benda antara permukaan yang sejajar dengan bidang x - y dan permukaan yang sejajar bidang z - y , dengan kata lain regangan geser (perubahan sudut) yang terjadi dalam bidang x - z .

γ_{yz}	Regangan geser dari benda antara permukaan yang sejajar dengan bidang y - x dan permukaan yang sejajar bidang z - y , dengan kata lain regangan geser (perubahan sudut) yang terjadi dalam bidang y - z .
Γ	Kumpulan titik-titik pada kurva atau garis batas suatu model tegangan/regangan bidang.
Γ_t	Kurva atau garis batas di mana gaya traksi permukaan t bekerja.
Γ_{tx}	Kurva atau garis batas di mana komponen gaya traksi dalam arah x , yakni t_x , diberikan.
Γ_{ty}	Kurva atau garis batas di mana komponen gaya traksi dalam arah y , yakni t_y , diberikan.
Γ_u	Kurva atau garis batas di mana perpindahan u diberikan.
Γ_u	Kurva atau garis batas di mana komponen perpindahan dalam arah x , yakni u , diberikan.
Γ_v	Kurva atau garis batas di mana komponen perpindahan dalam arah y , yakni v , diberikan.
Δ	Deformasi pegas (Bab 2); lambang untuk besaran-besaran virtual (Bab 5).
δ_{ab}	<i>Kronecker delta.</i>
$\delta \mathbf{d}$	Vektor perpindahan virtual titik-titik nodal elemen.
δd_a	Komponen perpindahan virtual titik nodal lokal a (Bab 5).
ΔL	Perubahan panjang batang.
δU	Energi regangan yang disebabkan oleh perpindahan virtual.
δu	Komponen pertama dari perpindahan virtual.
$\delta \mathbf{u}$	Vektor perpindahan virtual.
δu^h	Fungsi pendekatan untuk δu .
δW	Kerja yang dilakukan gaya-gaya aktual sepanjang perpindahan virtual.
$\delta \epsilon$	Regangan yang disebabkan oleh perpindahan virtual.
$\delta \epsilon$	Matriks kolom regangan-regangan akibat perpindahan virtual.
ϵ	Matriks kolom regangan, terdiri atas $\tau_x, \tau_y, \gamma_{xy}$.

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Regangan normal dalam arah sumbu x ; dalam arah sumbu y ; dalam arah sumbu z . Subskrip dapat dihilangkan jikalau sudah jelas dari konteks.
θ^e	Sudut orientasi suatu elemen batang dalam ruang 2D diukur dari sumbu X global.
θ_p	Sudut utama (<i>principal angles</i>), yaitu sudut orientasi bidang di mana tegangan utama terjadi.
N	Rasio Poisson.
σ_e	Tegangan ekuivalen von Mises
σ	Matriks kolom tegangan, terdiri atas $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.
σ_T	Matriks tegangan akibat pengaruh perubahan temperatur pada model tegangan/regangan bidang.
$\sigma_{\max}$	Tegangan utama dari analisis tegangan dua dimensi yang nilainya terbesar.
$\sigma_{\min}$	Tegangan utama dari analisis tegangan dua dimensi yang nilainya terkecil.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tegangan normal dalam arah sumbu x ; dalam arah sumbu y ; dalam arah sumbu z . Subskrip dapat dihilangkan bila artinya telah jelas dari konteks.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tegangan-tegangan utama pada suatu titik material, diurutkan dari yang terbesar sampai dengan yang terkecil.
$\tau_{\max}$	Tegangan geser maksimum pada suatu titik material.
τ_{xy}	Tegangan geser dalam arah y pada bidang yang garis normalnya sejajar sumbu x . Besarnya sama dengan τ_{yx} , yaitu tegangan geser dalam arah x pada bidang yang garis normalnya sejajar sumbu y .
τ_{yz}	Tegangan geser dalam arah z pada bidang yang garis normalnya sejajar sumbu y . Besarnya sama dengan τ_{zy} , yaitu tegangan geser dalam arah y pada bidang yang garis normalnya sejajar sumbu z .
τ_{zx}	Tegangan geser dalam arah x pada bidang yang garis normalnya sejajar sumbu z . Besarnya sama dengan τ_{xz} , yaitu tegangan geser dalam arah z pada bidang yang garis normalnya sejajar sumbu x .

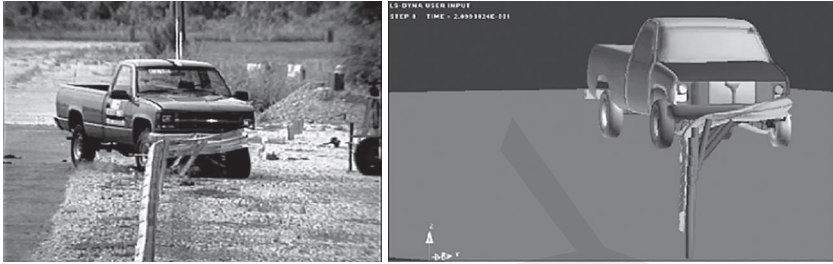
- Ω Kumpulan titik-titik yang ditempati model tegangan/ regangan bidang, tidak termasuk titik-titik pada kurva batas.
- $\bar{n}$ Kumpulan titik-titik yang ditempati model tegangan/ regangan bidang, termasuk titik-titik pada kurva batas.
- ∂ Matriks operator diferensial dalam hubungan perpindahan-regangan model tegangan/regangan bidang.

BAB 1

PENGENALAN METODE ELEMEN HINGGA

1.1 Model Matematis Struktur

Insinyur dalam pekerjaan desain atau perbaikan suatu produk perlu memahami perilaku produk itu sehingga dia dapat mengambil keputusan yang tepat dalam pekerjaannya. Demikian pula ilmuwan dalam melakukan riset memerlukan pemahaman yang mendalam akan suatu fenomena, perilaku, atau proses sistem yang menjadi objek risetnya. Perilaku, fenomena, atau proses sistem fisik dapat dipelajari melalui dua cara, yaitu: 1) dengan mengamati langsung di lapangan atau melakukan eksperimen di laboratorium, 2) dengan melakukan simulasi komputer. Sebagai contoh seorang insinyur hendak mendesain profil pagar pembatas jalan (*roadside safety guardrails*) yang baik. Profil pagar tidak baik didesain terlalu kuat karena ketika kendaraan menabrak pagar itu kendaraan akan rusak berat dan membahayakan penumpang. Sebaliknya, pagar juga tidak baik didesain terlalu lemah karena akan menjadi tidak efektif (kendaraan yang menabrak akan mematahkan pagar dan jalan keluar pagar). Supaya dapat mengetahui desain profil pagar yang baik, insinyur tersebut perlu mengetahui perilaku pagar dengan profil yang dia usulkan. Perilaku atau kinerja pagar ini dapat diketahui, baik melalui eksperimen maupun simulasi komputer, seperti diilustrasikan dalam Gambar 1.1. Bila setiap usulan desain profil pagar harus diuji dengan eksperimen, tentu saja proses desain menjadi sangat mahal. Karena itu simulasi komputer menjadi sangat berguna untuk mempercepat dan mempermudah proses desain.



Gambar 1.1 Ilustrasi Eksperimen dan Simulasi Komputer Mobil Menabrak Pagar

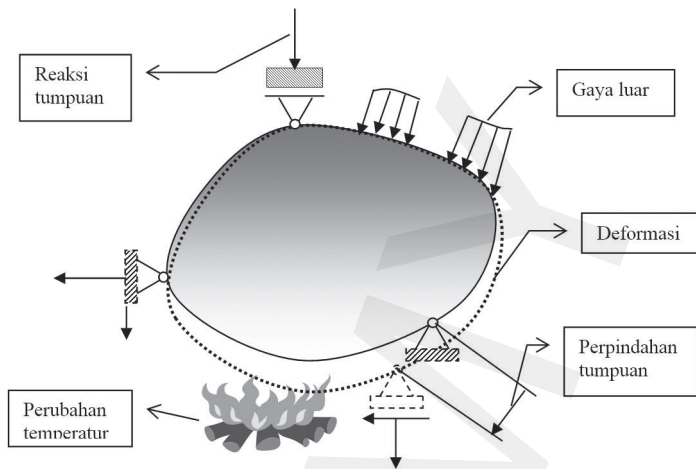
Sumber: Barry (2003)

Dasar teoretis dari simulasi komputer adalah model matematis dari sistem fisik yang sedang diamati. Yang dimaksud dengan model matematis adalah perumusan atau persamaan matematis yang menyatakan fenomena, perilaku, atau proses dari suatu sistem. Model matematis secara umum dapat ditulis dalam hubungan fungsional sebagai berikut (Chapra dan Canale, 2010):

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Variabel-variabel} \\ \text{terikat} \end{array} \right\} = f \left(\begin{array}{ccc} \text{Variabel-variabel} & \text{Parameter-} & \text{Fungsi-fungsi} \\ \text{bebas,} & \text{parameter,} & \text{pemaksa} \end{array} \right) \quad (1.1)$$

Suatu model matematis dibangun berdasarkan penyederhanaan dengan asumsi-asumsi tertentu mengenai fenomena, perilaku, atau proses dari sistem yang diamati. Proses penyederhanaan ini disebut idealisasi.

Sistem fisik yang dibahas dalam buku ini adalah sistem struktur dalam konteks mekanika struktur dan benda padat (*solid*). Yang dimaksud struktur adalah benda padat (*solid*) yang dikenai gaya-gaya atau pengaruh lainnya, misalnya: perubahan temperatur, penurunan tumpuan, tegangan awal (lihat ilustrasi Gambar 1.2). Bila suatu struktur dikenai gaya-gaya atau pengaruh lainnya, maka akan timbul respons struktur, yaitu perubahan bentuk struktur (deformasi), tegangan-tegangan atau gaya-gaya di dalam struktur itu, dan gaya-gaya reaksi pada titik-titik yang ditahan (reaksi tumpuan). Besaran yang dipakai untuk mengukur deformasi adalah regangan pada titik-titik atau perpindahan dari titik-titik struktur.



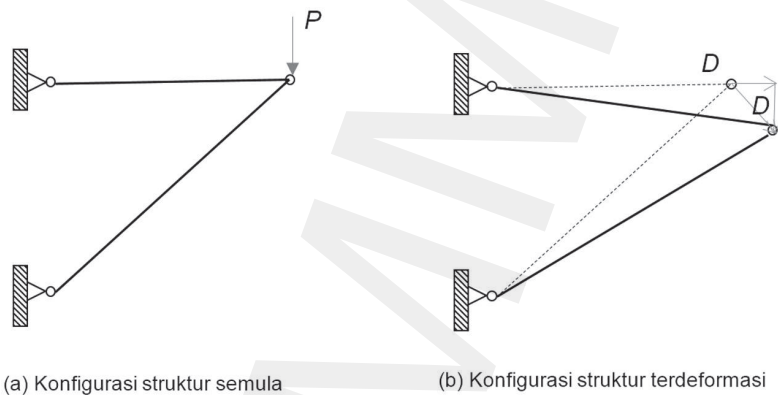
Gambar 1.2 Struktur, Gaya-gaya, dan Pengaruh Lainnya, dan Respons Struktur

Model matematis struktur, atau singkatnya model struktur, menyatakan hubungan antara respons struktur sebagai fungsi dari variabel bebas posisi titik pada struktur dan waktu, fungsi dari parameter-parameter bahan dan bentuk geometri struktur, dan fungsi dari gaya-gaya atau pengaruh luar lainnya. Jadi, variabel terikat dalam model struktur adalah respons struktur yang dapat dinyatakan dengan perpindahan, regangan, tegangan, atau gaya-gaya dalam.

Yang dimaksud perpindahan di sini adalah perubahan konfigurasi struktur dari konfigurasi semula (*undeformed configuration*). Perpindahan pada titik-titik tertentu pada struktur yang secara bebas menentukan konfigurasi struktur dinamakan derajat kebebasan (DOF, singkatan dari *Degree Of Freedom*). Ditinjau dari jumlah derajat kebebasannya, model struktur dapat digolongkan menjadi model diskrit dan model kontinu (*continuum*). Model struktur diskrit adalah model struktur yang perpindahannya dapat secara eksak dinyatakan dengan sejumlah DOF berhingga. Dengan kata lain, respons perpindahannya dapat dinyatakan dengan perpindahan pada sejumlah terhingga titik tertentu, yakni suatu vektor berdimensi terhingga. Sebaliknya, model kontinu adalah model struktur dengan jumlah DOF tak terhingga. Pada model ini respons perpindahannya bukan suatu bilangan atau

vektor, melainkan suatu fungsi dari posisi titik-titik pada struktur yang jumlahnya tak terhingga.

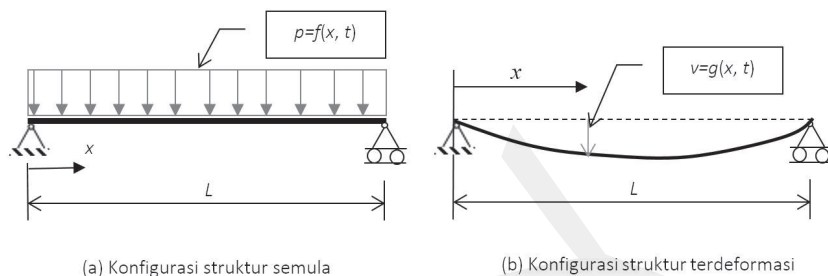
Sebagai contoh model struktur diskrit adalah model struktur rangka batang (*truss structure*) pada Gambar 1.3. Akibat beban luar P , rangka batang berubah bentuk (berdeformasi) menjadi seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1.3 (b). Konfigurasi rangka batang dan perpindahan semua elemen dalam struktur ini dapat dinyatakan secara eksak dengan komponen-komponen perpindahan D_1 dan D_2 , yaitu vektor $\mathbf{D} = (D_1 \ D_2)$. Struktur ini dikatakan mempunyai dua derajat kebebasan (aktif),¹ secara singkat ditulis $\text{DOF}=2$.



Gambar 1.3 Model Struktur Rangka Batang—Contoh Model Diskrit

Contoh model kontinu adalah balok di atas dua perletakan yang dikenai beban merata dinamis (yaitu, fungsi dari waktu), $p=f(x,t)$ seperti diilustrasikan pada Gambar 1.4. Akibat beban ini balok bergetar. Konfigurasi balok pada setiap waktu $t>0$ tidak cukup dinyatakan dengan perpindahan pada sejumlah titik, tetapi harus dinyatakan dengan perpindahan pada semua titik pada model balok (jumlah DOF tak terhingga). Dengan kata lain, perpindahan atau lendutan balok harus dinyatakan oleh suatu fungsi dari variabel bebas posisi x , yang kontinu antara $x=0$ dan $x=L$ (dalam notasi standar matematika ditulis $x \in [0,L]$) dan variabel bebas waktu t .

¹Dalam metode kekakuan langsung yang akan dibahas dalam bab-bab selanjutnya DOF dikategorikan dua macam, yaitu DOF aktif dan tidak aktif. DOF yang tidak aktif di sini adalah DOF pada titik-titik tumpuan.



Gambar 1.4 Model Struktur Rangka Batang—Contoh Model Diskrit

Model struktur diskrit berbentuk sehimpunan persamaan aljabar simultan untuk masalah statik dan sehimpunan persamaan diferensial biasa simultan untuk masalah dinamik. Persamaan model kontinum berupa satu atau sehimpunan persamaan diferensial parsial simultan. Persamaan-persamaan ini dapat menyatakan hubungan linier antara respons struktur dan aksi-aksi yang bekerja padanya. Bila hubungan ini linier maka respons struktur proporsional terhadap aksi-aksi itu. Sebagai contoh bila besar gaya P pada rangka batang Gambar 1.3 (a) menjadi $2P$, maka respons perpindahannya menjadi dua kali lipatnya, yaitu $(2D_1, 2D_2)$. Model struktur seperti ini disebut model struktur linier. Sebaliknya, model struktur yang tidak mengikuti sifat proporsionalitas antara respons struktur dan aksi-aksinya disebut model nonlinier. Sebagai buku pengenalan metode elemen hingga, model struktur yang dibahas dibatasi hanya untuk kasus yang paling sederhana, yaitu model struktur statik dan linier.

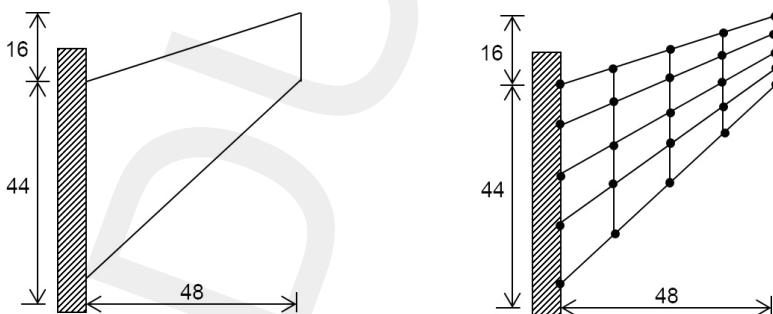
1.2 Metode Elemen Hingga

Untuk mendapat hasil simulasi,² persamaan-persamaan matematis yang menentukan model struktur (*governing equations*) perlu diselesaikan. Dalam praktik rekayasa dan penelitian akademis, sistem fisik yang diamati pada umumnya sangat rumit. Model matematisnya dapat melibatkan kontinum dengan bentuk geometri, pembebanan, dan kondisi tumpuan yang rumit. Sebagai contoh lihat model mobil dan pagar pengaman dalam Gambar 1.1. Karena kerumitan ini solusi dari *governing*

²Dalam teknik sipil, proses simulasi untuk mendapatkan pemahaman akan perilaku struktur lebih dikenal dengan istilah ‘analisis struktur’.

equations dengan metode analitis menjadi sangat sulit atau bahkan tidak dapat dilakukan. Oleh karena itu, diperlukan metode penyelesaian numerik untuk mendapatkan solusi dari masalah tersebut. Metode numerik yang terkenal dan banyak digunakan saat ini, terutama untuk analisis struktur, adalah metode elemen hingga (*finite element method*).

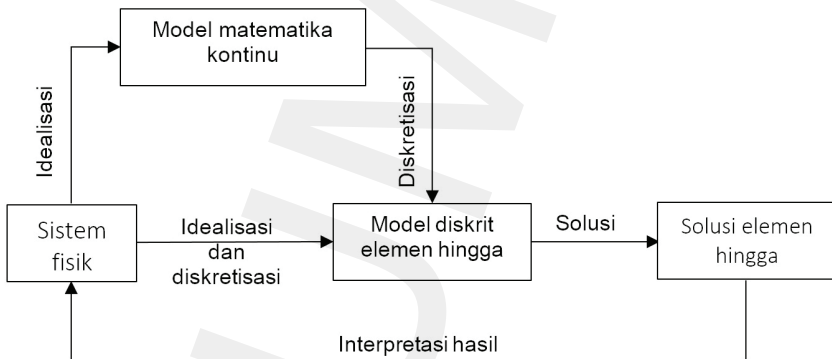
Langkah dasar dan pertama Metode Elemen Hingga (MEH) adalah memodelkan struktur sebagai rakitan (*assemblage*) dari bagian-bagian yang lebih kecil dan berbentuk sederhana. Bagian yang lebih kecil ini disebut elemen hingga. Titik yang menghubungkan antara satu elemen dengan elemen-elemen lainnya disebut titik nodal (*node*). Proses pembagian model struktur kontinu menjadi bagian-bagian yang lebih kecil (*meshing*) ini merupakan proses diskretisasi (lihat subbab 1.6 untuk penjelasan lebih lanjut), karena model yang semula kontinu dengan langkah ini menjadi model diskrit. Model diskrit ini disebut model elemen hingga. Sebagai contoh tinjau suatu model struktur kontinu seperti pada Gambar 1.5 (a). Dalam perhitungan dengan MEH, struktur ini perlu didiskretisasi dengan membagi-bagi struktur itu menjadi elemen-elemen segi empat seperti misalnya pada Gambar 1.5 (b). Untuk model struktur yang dari mulanya diskrit, diskretisasi dilakukan ketika melakukan idealisasi struktur. Persamaan model elemen hingga kemudian diperoleh dengan merakit dari persamaan-persamaan semua elemen yang menyusunnya. Hasilnya berupa persamaan aljabar simultan yang sangat banyak (sebanyak jumlah DOF-nya). Proses perakitan dan kemudian penyelesaian persamaan ini semuanya dilakukan secara otomatis dengan menggunakan komputer.



Gambar 1.5 Model Struktur Kontinu Didiskretisasi Menjadi Model Elemen Hingga yang Diskrit

Hasil penyelesaian dengan MEH umumnya tidak eksak (tidak tepat sama dengan solusi analitis dari model matematis yang sesuai). Walaupun demikian, perbedaan dengan hasil eksak (*error*) dapat diperkecil dengan memodelkan struktur dengan lebih banyak elemen-elemen yang lebih kecil. Konsekuensinya adalah ongkos perhitungan menjadi lebih mahal karena jumlah persamaan yang dirakit dan diselesaikan menjadi lebih banyak. Dengan demikian, terdapat *trade-off* antara keakuratan hasil perhitungan dan ongkos komputasi.

Langkah-langkah simulasi atau analisis struktur dengan MEH secara sederhana³ dilukiskan di dalam Gambar 1.6. Pertama sistem fisik, misalnya struktur gedung, diidealisasi menjadi model matematis struktur, yang dapat berupa model diskrit, model kontinu, atau campuran keduanya. Setelah itu dilakukan proses diskretisasi untuk mendapatkan model elemen hingga. Kemudian model elemen hingga ini diselesaikan sehingga didapatkan solusi elemen hingga. Solusi ini kemudian diinterpretasikan supaya dapat memberikan informasi berguna tentang perilaku atau proses sistem fisik yang sedang dipelajari.



Gambar 1.6 Langkah-langkah Simulasi dengan Metode Elemen Hingga

Dalam praktik simulasi di industri umumnya (Felippa, 2016, Ch. 6), insinyur memerlukan simulasi komputer untuk desain atau perbaikan kinerja suatu produk. Perusahaan tempat dia bekerja telah memiliki atau membeli suatu program komersial untuk simulasi komputer, yang bekerja berdasarkan MEH. Program ini memiliki berbagai jenis elemen

³Dalam simulasi sebenarnya proses ini sering perlu dilakukan berkali-kali (iteratif) sampai didapatkan model matematis dan model elemen hingga yang tepat.

hingga, misalnya elemen rangka tiga dimensi, elemen cangkang, elemen *solid*, dan lain-lain. Insinyur tersebut membuat model elemen hingga dari katalog elemen hingga yang tersedia dalam program. Sebenarnya ketika insinyur itu memilih elemen, dia secara implisit memilih model matematis yang mendasari elemen yang dia pakai.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa MEH adalah suatu prosedur perhitungan untuk mendapatkan solusi pendekatan (*approximate solutions*) terhadap masalah-masalah fisik. Dipandang dari segi matematis, MEH adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Buku ini mengenalkan MEH, baik dari segi pandang fisik atau *engineering* maupun dari segi matematis.

Definisi Umum

Metode elemen hingga adalah:

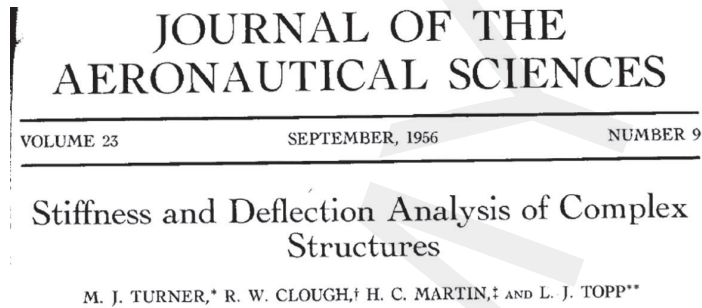
- 1) suatu prosedur perhitungan untuk mendapatkan solusi terhadap masalah-masalah fisik;
- 2) suatu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial.

Sejarah Singkat MEH

Sebelum MEH dikembangkan, para insinyur dalam *structural engineering* telah mengembangkan metode komputer untuk analisis struktur rangka diskrit (tersusun atas elemen-elemen rangka 1D), yang dikenal dengan metode kekakuan langsung (DSM: *direct stiffness method*, lihat subbab 1.7 untuk penjelasan lebih rinci) (Felippa, 2016, App.H). Prinsip dasar metode ini adalah persamaan aljabar simultan model struktur global dirakit dari persamaan aljabar elemen-elemen penyusunnya. Matriks kekakuan struktur diperoleh secara langsung dengan menjumlahkan matriks kekakuan elemen-elemen penyusunnya (karena itulah disebut '*direct stiffness*'). MEH berasal dari DSM dan merupakan generalisasi DSM untuk dapat menangani model struktur kontinu (Clough dan Wilson, 1999; Felippa, 2016, App.O).

MEH pertama kali dikembangkan dan diterapkan oleh para insinyur teknik penerbangan di bawah pimpinan M.J. Turner pada tahun 1950-an di pabrik pesawat terbang Boeing. Tujuan pengembangan MEH pertama kali adalah untuk memodelkan kekakuan yang diperlukan dalam analisis getaran sayap pesawat terbang dan untuk memprediksi perpindahannya secara akurat. Hasil riset dan pengembangan ini

kemudian dipublikasikan dalam *Journal of the Aeronautical Sciences* yang terbit pada bulan September 1956 (Turner, Clough, Martin, dan Topp, 1956). *Paper* ini (Gambar 1.7) adalah publikasi ilmiah pertama MEH dari segi pandang *engineering*.



Gambar 1.7 Publikasi Ilmiah Pertama MEH Secara *Engineering*

Sebenarnya sebelum Turner, *et al.*, mengembangkan MEH pada tahun 1950-an, sekitar dua puluh tahun sebelumnya matematikawan R. Courant (1943) telah menerapkan prosedur perhitungan yang pada prinsipnya adalah MEH (walaupun pada waktu itu MEH belum dikenal) untuk memecahkan masalah torsi penampang batang yang bentuknya rumit (Courant, 1943). Namun, karena teknologi komputer saat itu belum menunjang penggunaan metode yang diusulkannya, maka prosedur Courant ini tidak menjadi prosedur praktis yang dikenal para insinyur (termasuk Turner, *et al.*).

Nama *Finite Element Method* (FEM) diberikan pertama kali oleh R. W. Clough (pengarang kedua *paper* pada Gambar 1.7) pada tahun 1960 dalam *paper* “The Finite Element in Plane Stress Analysis” dalam *Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*. Elemen disebut *finite* untuk membedakannya dengan *infinitesimal element* dalam kalkulus. Nama FEM juga untuk membedakannya dengan DSM (Clough dan Wilson, 1999).

Program komputer MEH *open source* pertama dikembangkan oleh E. L. Wilson (waktu itu adalah mahasiswa S-2 di bawah bimbingan R.W. Clough) (Clough dan Wilson, 1999; Felippa, 2016; Taylor, 2008). Program ini menjadi dasar kerja para peneliti MEH di awal-awal pengembangan MEH. Buku teks pertama MEH ditulis O.C. Zienkiewicz pada tahun 1967 (Taylor, 2008). Buku ini sekarang telah edisi ke-7 dan

terdiri atas tiga volume. Menarik untuk dicatat bahwa O.C. Zienkiewicz pada mulanya adalah seorang ahli metode diskretisasi yang lain, yaitu *finite difference method*, sebelum diperkenalkan MEH oleh R.W. Clough.

1.3 Software Metode Elemen Hingga

Saat ini MEH terkandung dalam program-program komputer komersial, terintegrasi dengan program-program *Computer Aided Design* (CAD) atau *Computer Aided Engineering* (CAE). Program-program ini jenisnya beragam, ada yang *general-purpose* ada yang *special-purpose*. Contoh program yang *general-purpose* adalah NASTRAN, ANSYS, ABAQUS, ADINA. Setiap program ini memiliki berbagai jenis elemen hingga dan dapat melaksanakan berbagai analisis, termasuk analisis statik, dinamik, transfer panas, interaksi struktur-fluida, dan lain-lain. Program analisis struktur yang banyak dipakai dalam industri konstruksi teknik sipil, antara lain SAP2000, MIDAS, STAAD.Pro, GT STRUDL, SANSPRO.⁴ Program yang *special purpose* misalnya ETABS yang dibuat khusus atau lebih cocok digunakan untuk analisis dan desain struktur gedung, dan PLAXIS untuk analisis elemen hingga masalah-masalah dalam bidang geoteknik. Program-program komersial tersebut dilengkapi dengan *preprocessor*, yaitu program bantu untuk memudahkan pemasukan data, dan *postprocessor*, yaitu program bantu untuk mengolah dan menampilkan keluaran program. *Pre* dan *postprocessor* ini menggunakan interaksi grafis, yang membuat penggunaan program elemen hingga menjadi lebih mudah dan lebih cepat. Selain itu, terdapat juga program khusus untuk melakukan *pre* dan *postprocessor* tanpa program inti MEH (*finite element solver*), misalnya program GID.

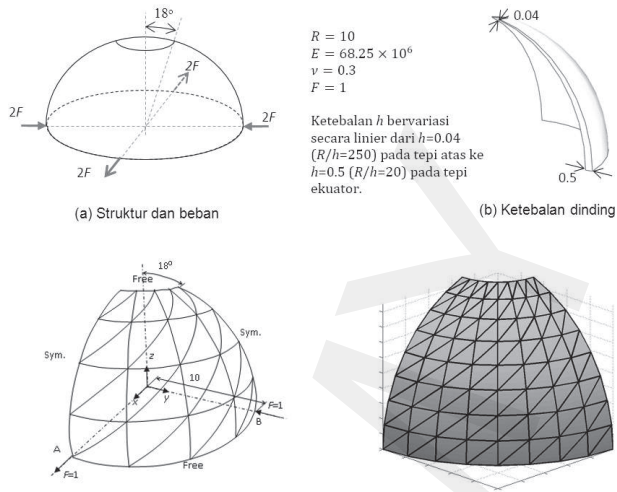
Setiap program MEH mempunyai kemampuan dan keterbatasan yang berbeda-beda, baik dipandang dari sudut jenis analisisnya, jenis elemen hingga yang tersedia, maupun besar derajat kebebasan (*Degree Of Freedom*, DOF) yang dapat diselesaikan. Kewajiban calon pengguna (*user*) program adalah mengenal kemampuan dan keterbatasan dari paket program yang akan digunakan.

⁴SANSPRO merupakan program MEH komersial yang dihasilkan oleh putra Indonesia, yaitu Dr. Nathan Madutujuh (alumnus Universitas Katolik Parahyangan, Bandung).

1.4 Contoh Aplikasi

Karena MEH merupakan bagian yang integral dari program-program komersial CAD/CEA seperti dibahas sebelum ini, maka untuk melihat contoh-contoh aplikasi MEH dalam praktik rekayasa sesungguhnya kita dapat melihat contoh-contoh aplikasi program komputer yang disajikan dalam beberapa situs internet program tersebut. Dalam situs-situs itu biasanya terdapat contoh-contoh nyata dari proyek-proyek yang menggunakan program tersebut. Contoh-contoh ini kadang-kadang disajikan dalam bentuk multimedia yang menarik. Sebagai contoh dalam situs ADINA terdapat situs khusus *customer stories* yang antara lain berisi deskripsi aplikasi ADINA di dunia industri. Contoh lain, situs MIDAS menyajikan laman *project showcase* yang berisi deskripsi singkat berbagai proyek yang menggunakan perangkat lunak MIDAS dalam tahap pekerjaan analisis dan desain struktur. Pembaca dianjurkan untuk mengunjungi salah satu situs program MEH untuk melihat berbagai aplikasi MEH secara langsung.

Dalam bagian ini akan disajikan dua contoh sederhana aplikasi MEH yang pernah penulis lakukan dalam penelitian bersama mahasiswa di Universitas Kristen Petra, Surabaya. Contoh pertama adalah analisis statik linier struktur cangkang (*shell structure*) setengah bola dengan lubang 18° yang dikenakan empat beban terpusat sepanjang garis tengahnya seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.8 (a) (satuan boleh dipilih menggunakan satuan apa saja, yang penting konsisten). Tebal dinding cangkang itu bervariasi secara linier dari ketebalan 0.04 satuan (misalnya meter) pada bagian atasnya sampai 0.5 satuan pada dasarnya seperti terlihat pada Gambar 1.8 (b) (Foek Tjong Wong, Christabel, Pudjisuryadi, dan Kanok-Nukulchai, 2015). Kondisi tumpuan sepanjang ekuator dan sepanjang tepi lubang pada bagian atas adalah bebas (tanpa *constraint*). Yang ingin diketahui adalah besarnya perpindahan titik-titik di mana beban terpusat bekerja.



Gambar 1.8 Struktur Cangkang Setengah Bola Berlubang 18°

Karena struktur ini simetris terhadap garis-garis tengah yang melalui beban-beban terpusat (lihat Gambar 1.8 (a)), maka struktur ini dapat dimodelkan seperempat bagian saja seperti diperlihatkan pada Gambar 1.8 (c). Seperempat bagian ini kemudian dibagi-bagi menjadi elemen-elemen cangkang segitiga (yaitu, di-*mesh*). Pertama-tama dipakai *mesh* 4×4 dengan jumlah elemen sebanyak $2 \times 4 \times 4 = 32$, seperti diperlihatkan pada Gambar 1.8 (c). Perhitungan dilakukan dengan program MEH yang penulis buat sendiri dalam Matlab (FT. Wong, 2009). Program ini memiliki kemampuan untuk memodelkan elemen cangkang dengan ketebalan yang bervariasi, seperti pada contoh ini. Hasil perhitungan ini adalah perpindahan titik-titik pada lokasi bebab terpusat 9.15×10^{-6} . Pertanyaannya apakah hasil ini sudah akurat, atau lebih tepatnya apakah hasil ini sudah hasil yang konvergen? Untuk menilai kekonvergenannya, *mesh* diperhalus dari 4×4 menjadi 8×8 (128 elemen) seperti pada Gambar 1.8 (d). Ternyata hasilnya berubah jauh, yakni menjadi 6.44×10^{-5} . Ini menandakan *mesh* 4×4 terlalu kasar. Selanjutnya *mesh* diperhalus lagi menjadi 16×16 dan 32×32 . Hasil selengkapnya disajikan pada Tabel 1.1. Mengamati tren hasil perhitungan, dapat dikatakan bahwa hasil dengan *mesh* 32×32 sudah cukup.⁵

⁵Model elemen tiga dimensi dengan program ABAQUS memberikan hasil yang sedikit lebih tinggi, yaitu 7.61×10^{-5} (Christabel, *et al.*, 2014).

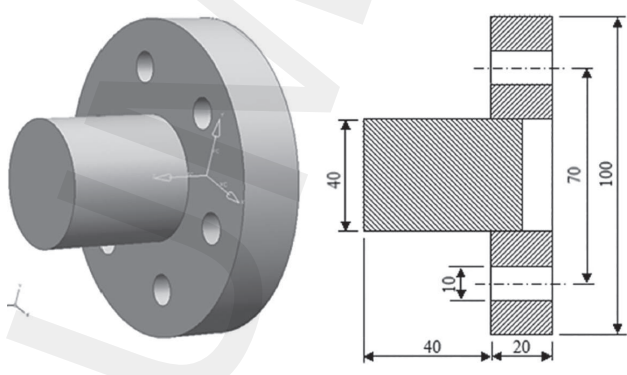
Tabel 1.1 Hasil-hasil Perhitungan MEH untuk Berbagai Mesh

Mesh	Perpindahan
4×4	9.15E-06
8×8	6.44E-05
16×16	7.20E-05
32×32	7.33E-05

Sumber: Christabel, Wong, dan Pudjisuryadi (2014)

Contoh kedua adalah analisis statik linier model 3D bagian suatu mesin yang dinamakan *half-coupler* seperti dipresentasikan oleh Cui, Feng, Li, dan Feng (2015). Data geometri, beban, perletakan, dan sifat material diberikan pada Tabel 1.2. Yang hendak ditinjau adalah perpindahan tangensial pada titik terluar dari lempengan yang terkena gaya torsi dan distribusi tegangan dalam benda tersebut.

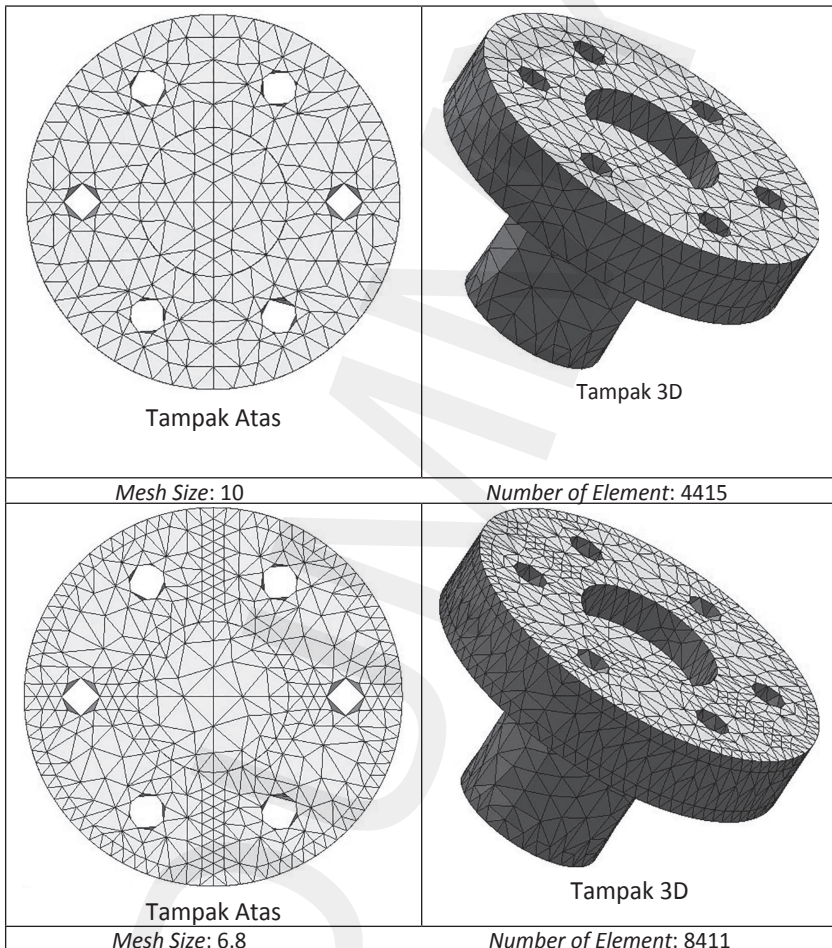
Tabel 1.2 Deskripsi Permasalahan *Half-Coupler*

Problem:	Half-Coupler Problem (Cui, et al., 2015)	
Geometri:		
Pembebanan:	Beban torsi $\tau = 1e^{-3}$ N-m pada ujung kanan	
Perletakan:	Terjepit di ujung kiri	
Sifat Material:	$E = 2.1 \times 10^9$ Pa	$\nu = 0.3$

Sumber: Satria dan Tanaya (2016)

Untuk memecahkan masalah dengan MEH, *half-coupler* ini dimodelkan dengan *mesh* elemen-elemen *tetrahedron* kuadratik. Proses *meshing* dilakukan secara otomatis dengan bantuan program GID. Ukuran

mesh yang dipakai, yang merupakan salah satu input parameter dalam GID, yaitu 10 (4415 elemen) dan 6.8 dengan (8411 elemen) seperti pada Gambar 1.9 (visualisasi dengan GID). Perhitungan dilakukan dengan *in-house* program dalam Matlab yang dibuat oleh Bryan L.S. dan Levin S.T. (Satria dan Tanaya, 2016).



Gambar 1.9 Model Elemen Hingga *Half-Coupler* dengan Parameter GID *Mesh Size=10* dan *Mesh Size=6.8*

Sumber: Satria dan Tanaya (2016)

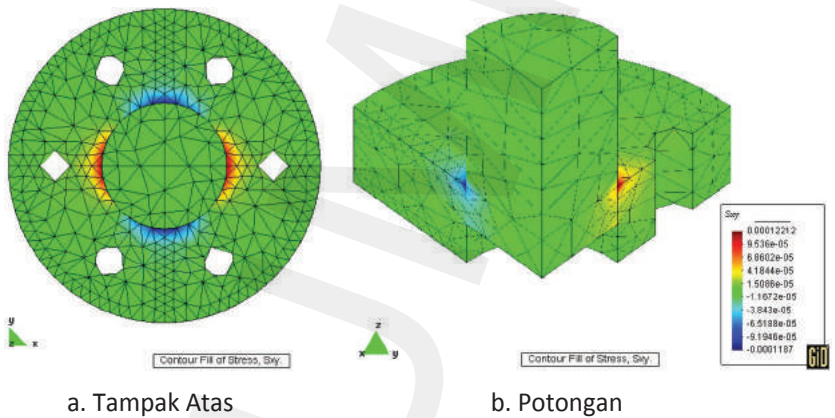
Hasil perhitungan berupa perpindahan radial maksimum pada titik terluar dari lempengan yang terkena gaya torsi disajikan pada

Tabel 1.3. Terlihat bahwa hasil berdasarkan kedua *mesh* itu tidak jauh berbeda. Jadi, hasil ini sudah konvergen paling tidak sampai tiga digit. Distribusi tegangan geser, τ_{xy} , hasil perhitungan MEH dengan *mesh size*=6.8 disajikan dengan kontur warna seperti pada Gambar 1.10 (visualisasi dengan GID). Dari gambar ini terlihat bahwa tegangan geser terbesar terjadi pada sambungan antara inti kopler dengan lempengan yang terkena gaya. Dalam aplikasi nyata, sambungan pada kopler ini perlu mendapat perhatian karena menjadi lokasi yang rawan terjadi kegagalan struktur, misalnya karena retak.

Tabel 1.3 Perpindahan Radial Maksimum pada *Half-Coupler*

Ukuran Meshing	Jumlah Elemen	Hasil Program
10	4415	1.1574E-05
6.8	8411	1.1634E-05

Sumber: Satria dan Tanaya (2016)



Gambar 1.10 Visualisasi Tegangan σ_{xy} *Half-Coupler* dengan Elemen Kuadratik, *Size* 6.8

Sumber: Satria dan Tanaya (2016)

1.5 Mengapa Perlu Mempelajari MEH?

Saat ini sudah banyak paket program komersial MEH di pasaran, yang ‘mudah’ dipelajari dan digunakan. Lalu, mengapa perlu mempelajari konsep dasar MEH? Mengapa tidak cukup membeli suatu *software* MEH, mempelajari cara pemakaiannya, lalu memakainya dalam pekerjaan?

Untuk menjawab pertanyaan ini mari kita melihat apa yang dikatakan Cook, *et al.* (1989), pengarang buku MEH yang cukup populer:

“Concepts and assumptions behind the computer codes (FEM software) should be mastered. Engineers are expected to be able to use the software to gain better advantages and will less likely misuse them.” Cook, Malkus, dan Plesha, 1989).

Selain itu, mari kita lihat *disclaimer* dari salah satu program komersial, SAP2000:

“... The user accepts and understands that no warranty is expressed or implied by the developers or the distributors on the accuracy or reliability of the program. The user must explicitly understand the assumptions of the program and must independently verify the results.” (SAP2000 Ver.11.0.0 Basic Analysis Reference Manual).

Dari dua kutipan di atas jelas bahwa untuk dapat memanfaatkan suatu paket program MEH, diperlukan latar belakang pengetahuan tentang konsep dan asumsi-asumsi yang terdapat di dalam program (selain tahu bagaimana cara mengoperasikan program, tentunya). Pengetahuan ini dapat diperoleh salah satunya dengan mempelajari konsep dasar prosedur perhitungan yang dipakai dalam program, yaitu MEH. Pengguna program dengan latar belakang pengetahuan MEH yang baik diharapkan dapat menggunakan suatu paket program MEH dengan cerdas dan terhindar dari salah menggunakan (*misuse*) program itu.

Pengguna paket program MEH perlu memahami konsep dasar MEH supaya dapat mendayagunakan program itu dengan baik dan terhindar dari salah menggunakan program.

Bagi pembaca yang tujuan, kehendak, atau pekerjaannya adalah membuat atau mengembangkan *software* MEH, atau hendak melakukan penelitian mengenai MEH, maka pengertian yang mendalam tentang teori elemen hingga jelas merupakan kebutuhan. Pengertian yang mendalam ini dapat diperoleh dengan memandang MEH bukan hanya sebagai cara perhitungan praktis untuk memecahkan masalah-masalah *engineering*, tetapi juga secara matematis sebagai suatu metode numerik untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial.

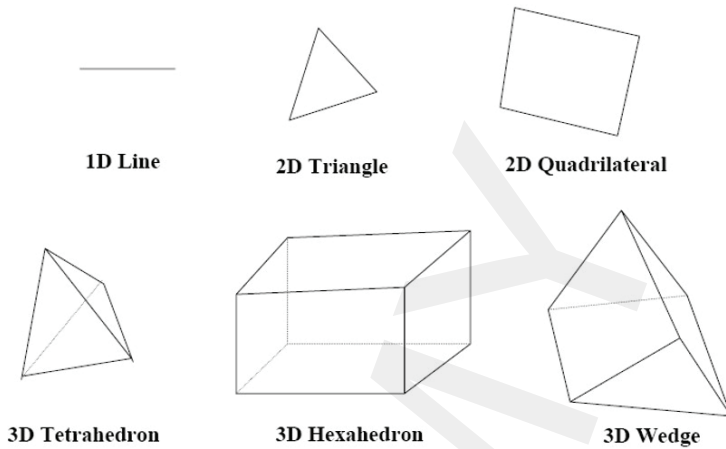
Bagi pembaca yang sedang mempelajari matematika, MEH dapat menjadi sarana untuk memperkuat pemahaman matematika. Di dalam

MEH, konsep-konsep matematika yang dipelajari dalam kalkulus, teori persamaan diferensial, dan aljabar linier banyak diterapkan. Ahli matematika ternama, G. Strang ("*Finite Element Method-Gilbert Strang*", n.d.) mendapati bahwa MEH merupakan metode numerik yang sangat sukses diterapkan dalam praktik bidang rekayasa, khususnya untuk *solid mechanics*.

Dan terakhir, bagi pembaca yang sedang mempelajari suatu bahasa pemrograman komputer untuk perhitungan dan grafis, maka MEH dapat menjadi sarana yang baik untuk mempraktikkan dan mempertajam kemampuan dalam pemrograman.

1.6 Diskretisasi Model Kontinu

Seperti telah dijelaskan dalam subbab 1.2, langkah pertama yang penting dalam MEH adalah diskretisasi. Diskretisasi ini dilakukan dengan *meshing*, yaitu dengan membagi-bagi suatu kontinum (model fisik kontinu) menjadi sejumlah terhingga elemen-elemen sederhana yang lebih kecil, yang gabungannya mendekati geometri kontinum semula. *Meshing* ini dapat dilakukan secara manual (sebagai contoh, lihat Gambar 1.5 dan 1.8) atau dibantu program *preprocessor* yang terintegrasi dalam paket program MEH, atau program khusus *pre-processor* seperti GID (sebagai contoh, lihat Gambar 1.9). Kata 'mendekati' dalam definisi diskretisasi ditekankan karena bisa saja bentuk keseluruhan model elemen hingga (hasil diskretisasi) tidak secara eksak sama dengan geometri kontinum semula. Ini terjadi terutama untuk model kontinum dengan batas-batas kurva lengkung pada model 2D dan batas-batas permukaan lengkung pada model 3D. Elemen 'sederhana' yang dimaksudkan di sini adalah elemen yang bentuknya sederhana. Bentuk-bentuk elemen yang umum digunakan untuk model 1D, 2D, dan 3D diperlihatkan pada Gambar 1.11.



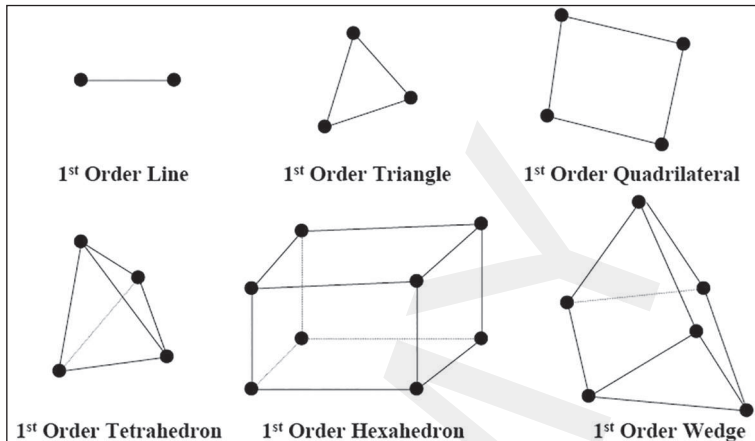
Gambar 1.11 Beberapa Bentuk Dasar Elemen Hingga

Sumber: Barry (2003)

Setiap elemen hingga memiliki sejumlah titik khusus yang disebut titik nodal. Titik-titik nodal ini sangat penting karena pada titik-titik ini didefinisikan nilai-nilai variabel utama yang tidak diketahui. Jumlah seluruh variabel utama pada satu titik nodal disebut derajat kebebasan titik nodal (nodal DOF). Jumlah seluruh derajat kebebasan titik nodal dari suatu elemen hingga adalah derajat kebebasan elemen (elemen DOF). Selain itu, titik-titik nodal berfungsi sebagai titik penghubung antara satu elemen dengan elemen lainnya dalam model elemen hingga. Tidak ada bagian lain pada elemen hingga yang berinteraksi dengan elemen lainnya kecuali pada titik nodal.

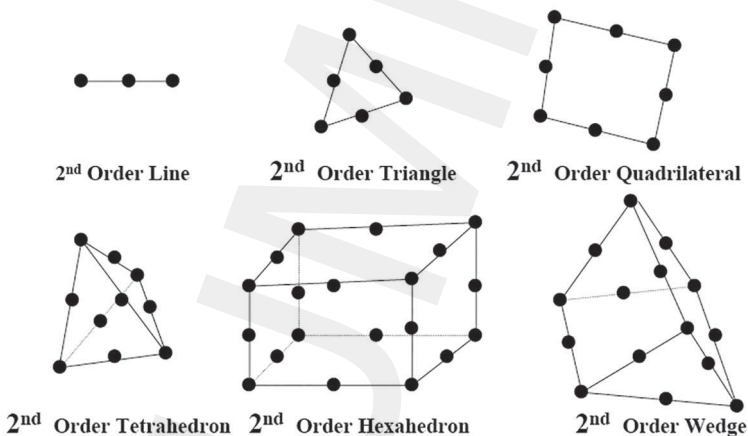
Jumlah titik nodal pada suatu elemen hingga bergantung kepada orde polinom yang digunakan dalam perumusan elemen itu. Pada elemen hingga berorde linier atau singkatnya elemen linier,⁶ titik-titik nodal terletak pada titik-titik sudut elemen seperti diperlihatkan pada Gambar 1.12. Pada elemen-elemen berorde lebih tinggi, selain pada titik-titik sudut elemen terdapat pula titik-titik nodal pada posisi lain, biasanya pada tengah-tengah rusuk-rusuk elemen dan/atau di dalam elemen. Sebagai contoh perhatikan elemen-elemen kuadratik pada Gambar 1.13.

⁶Elemen linier maksudnya elemen yang di dalamnya variabel utama didekati dengan fungsi pendekatan linier. Konsep ini akan menjadi jelas setelah mempelajari Bagian II.



Gambar 1.12 Beberapa Elemen Berderajat Linier

Sumber: Barry (2003)

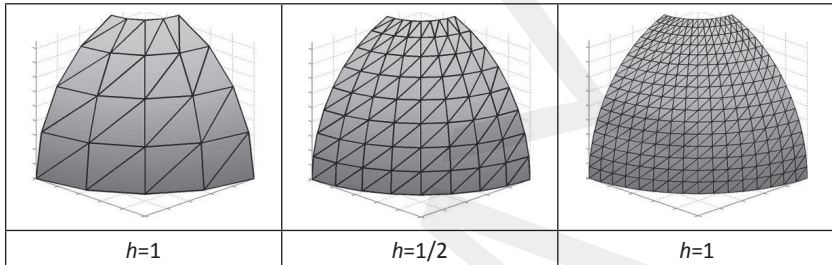


Gambar 1.13 Beberapa Elemen Berderajat Kuadratik

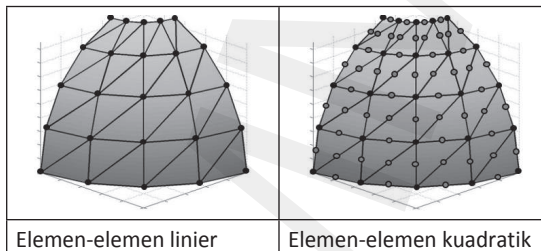
Sumber: Barry (2003)

Seperti dijelaskan pada subbab 1.2, solusi MEH pada umumnya tidak eksak, namun kesalahannya dapat diperkecil dengan memperbanyak jumlah elemen dalam model MEH. Cara perbaikan solusi seperti ini dinamakan *h-refinement*. Selain cara ini, perbaikan solusi MEH dapat juga dicapai dengan meningkatkan orde polinom elemen. Cara ini dinamakan *p-refinement*. Gambar 1.14 mengilustrasikan *h-refinement* and *p-refinement* yang dapat dilakukan untuk struktur cangkang yang dijelaskan dalam

subbab 1.5. Pada Gambar 1.14 (a) ukuran karakteristik relatif elemen diperkecil dari $h=1$, $h=1/2$, menjadi $h=1/4$. Pada Gambar 1.14 (b) orde polinom ditingkatkan dari linier menjadi kuadratik (jikalau tersedia elemen berorde kubik *p-refinement* masih bisa dilanjutkan satu orde lagi).



(a) *h-refinement*: perbaikan dengan mengecilkan ukuran elemen



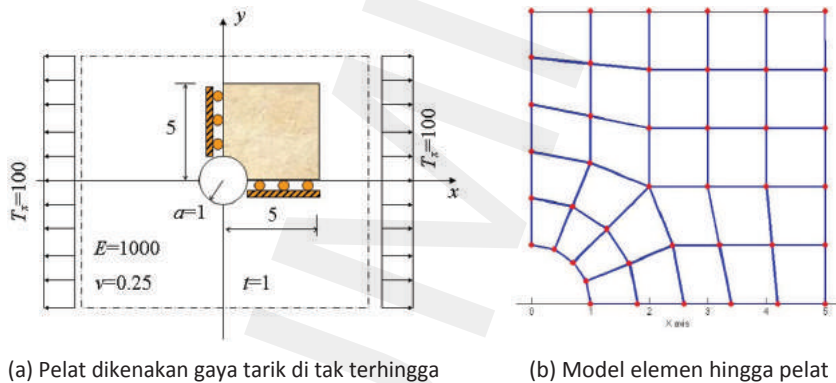
(b) *p-refinement*: perbaikan dengan meningkatkan derajat elemen

Gambar 1.14 Dua Cara Perbaikan Solusi MEH: (a) *h-refinement* dan (b) *p-refinement*

Saran dalam Melakukan *Meshing*

Dalam melakukan *meshing* secara manual atau semi-manual, disarankan pertama-tama untuk mencoba dengan *mesh* yang medium (tidak terlalu kasar, tetapi juga tidak terlalu halus), yang dapat merepresentasikan geometri kontinum dengan baik. Usahakan tidak ada bentuk elemen yang terlalu menyimpang dari bentuk-bentuk standar elemen, yakni bujur sangkar dan segitiga siku-siku sama kaki untuk masalah 2D, dan kubus dan *tetrahedron* dengan tiga permukaan segitiga siku-siku sama kaki untuk masalah 3D. Bentuk elemen yang terlalu “pipih”, misalnya segi empat dengan aspek rasio yang lebih besar dari tiga, dan elemen dengan sudut terlalu tumpul atau terlalu tajam, sebaiknya dihindari karena dapat mengurangi keakuratan solusi MEH.

Ukuran dan bentuk elemen tidak perlu sama pada seluruh bagian kontinum. Bila sudah ada perkiraan sebelumnya akan tempat-tempat dengan perubahan nilai variabel yang cepat, misalnya dalam masalah analisis tegangan 2D pada daerah sekitar lubang dan sekitar tumpuan, maka disarankan pada daerah-daerah ini dipakai *mesh* yang lebih halus. Sebagai contoh, tinjau analisis tegangan pada pelat berlubang yang ditarik pada sisi yang jauh di kiri dan kanannya seperti pada Gambar 1.15 (a). Memanfaatkan kondisi simetri, hanya seperempat bagian pelat yang perlu didiskretisasi. *Meshing* awal diperlihatkan pada Gambar 1.15 (b). Karena sudah diketahui bahwa tegangan akan terkonsentrasi pada daerah sekitar lubang, maka dalam elemen-elemen sekitar lubang ukurannya dibuat kecil daripada bagian lainnya. Setelah dilakukan perhitungan MEH, apabila hasilnya dipandang belum memuaskan *mesh* ini dapat diperhalus lagi dengan cara membagi setiap elemen menjadi empat bagian.



Gambar 1.15 Pelat Berlubang dan Model Elemen Hingganya

Untuk bentuk geometri yang rumit dan terutama pada masalah 3D (contoh lihat Tabel 1.2 dan Gambar 1.9), penggunaan suatu program *pre-processor* untuk melakukan *meshing* secara otomatis sangat disarankan.

1.7 Prosedur Perhitungan MEH—Metode Kekakuan Langsung

Langkah pertama perhitungan MEH adalah mendiskretisasi model struktur kontinu menjadi model diskrit. Setelah menjadi model diskrit, langkah-langkah perhitungan selanjutnya mengikuti langkah-langkah

perhitungan metode kekakuan langsung (*Direct Stiffness Method*, disingkat DSM). Untuk analisis statik linier, langkah-langkah itu adalah sebagai berikut:

1. Menghitung matriks kekakuan dan vektor⁷ gaya untuk setiap elemen.
2. Merakit matriks dan vektor itu menjadi matriks kekakuan dan vektor gaya struktur.
3. Mengenakan gaya-gaya terpusat yang bekerja pada titik-titik nodal (ditambahkan pada vektor gaya struktur).
4. Mengenakan kondisi batas esensial (kondisi tumpuan) pada persamaan kekakuan struktur.
5. Menyelesaikan persamaan kekakuan struktur untuk memperoleh vektor perpindahan titik-titik nodal struktur.
6. Menghitung reaksi perletakan dan tegangan atau gaya-gaya dalam struktur.

Dalam prosedur DSM ini, pada tiga langkah pertama semua kondisi batas esensial dihilangkan dahulu. Kondisi batas ini baru diterapkan setelah memperoleh persamaan kekakuan struktur. DSM seperti ini adalah DSM dengan pengenaan kondisi batas pada akhir (*posteriori imposition of boundary conditions*). Terdapat DSM varian lain dengan pengenaan kondisi batas pada awal (*apriori imposition of boundary conditions*). Pada DSM varian ini, proses perakitan persamaan-persamaan elemen tidak melibatkan derajat kebebasan yang sudah diketahui. Dengan kata lain, kondisi batas langsung diterapkan pada tingkat elemen sehingga langkah ke-4 tidak diperlukan. Kedua varian DSM ini akan dijelaskan pada Bagian I buku ini dalam konteks masalah yang sederhana, yaitu sistem pegas dan struktur rangka batang. Implementasi komputer MEH dan DSM akan dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman Matlab (pengenalan Matlab diberikan dalam Lampiran A untuk pembaca yang belum mengenal Matlab).

Langkah-langkah tersebut di atas adalah langkah-langkah analisis statik linier yang standar. Dalam praktik pemrograman untuk perangkat lunak komersial, biasanya langkah-langkah ini dimodifikasi dan disisipkan langkah-langkah lain dengan tujuan untuk menghasilkan

⁷Yang dimaksud vektor di sini adalah matriks kolom.

program yang *user friendly*, hemat dalam penggunaan *memory*, cepat saat eksekusi, dan akurat hasilnya.

1.8 Ringkasan

- 1) Model struktur merupakan idealisasi dari struktur sebenarnya yang memberikan gambaran perilaku struktur, yaitu hubungan antara respons struktur dan aksi yang bekerja pada struktur.
- 2) Model struktur diskrit memiliki sejumlah DOF terhingga, sedangkan model kontinu jumlahnya DOF tak terhingga.
- 3) Dalam model struktur linier respons proporsional terhadap aksi.
- 4) Metode elemen hingga adalah suatu prosedur perhitungan untuk mendapatkan solusi terhadap masalah-masalah fisik.
- 5) Secara matematis MEH adalah suatu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial.
- 6) Pada umumnya hasil perhitungan dengan MEH tidak eksak.
- 7) Asal mula MEH adalah dari industri pesawat terbang.
- 8) Program-program komersial MEH saat ini sangat banyak. Kewajiban pengguna untuk mengenal kemampuan dan keterbatasan dari paket program yang akan digunakan.
- 9) Pengguna paket program MEH perlu memahami konsep dasar MEH agar dapat mendayagunakan program dengan baik dan terhindar dari salah menggunakan program.
- 10) Langkah pertama yang penting dalam analisis kontinum dengan MEH adalah diskretisasi, yaitu membagi-bagi kontinum itu menjadi sejumlah terhingga elemen-elemen sederhana yang lebih kecil.
- 11) Titik-titik nodal pada elemen hingga merupakan lokasi di mana variabel yang tidak diketahui didefinisikan. Titik-titik nodal juga berfungsi sebagai penghubung antara satu elemen dengan elemen lainnya.
- 12) Solusi MEH dapat ditingkatkan akurasinya, baik dengan cara memperhalus *mesh* (*h-refinement*) maupun dengan meningkatkan orde elemen yang digunakan (*p-refinement*).
- 13) *Mesh* elemen hingga sebaiknya tidak mengandung elemen yang bentuknya terlalu menyimpang dari bentuk standar, yakni bujur

sangkar untuk elemen segi empat dan segitiga siku-siku sama kaki untuk elemen segitiga (kubus dan *tetrahedron* bersisi segitiga siku-siku sama kaki untuk masalah 3D).

- 14) Prosedur perhitungan MEH setelah melakukan diskretisasi adalah mengikuti prosedur metode kekakuan langsung (DSM: *Direct Stiffness Method*). Langkah-langkah utamanya adalah merakit persamaan-persamaan kekakuan elemen menjadi persamaan kekakuan struktur, menyelesaikan persamaan ini, kemudian menghitung reaksi perletakan dan tegangan atau gaya-gaya pada setiap elemen.

Daftar Referensi

- Barry, W.J. (2003). *FEM Lecture Notes*. Pathumthani: Asian Institute of Technology.
- Chapra, S.C. dan R.P. Canale. (2010). *Numerical Methods for Engineers*. Sixth Edition. New York: McGraw-Hill.
- Christabel, Y., F.T. Wong, dan P. Pudjisuryadi. (2014). “Studi Keakuratan Elemen Cangkang Berbasis Kriging dalam Menganalisis Cangkang yang Tebalnya Tidak Konstan”. *Jurnal Dimensi Pratama Teknik Sipil*, 3(1). Retrieved from <http://studentjournal.petra.ac.id/index.php/teknik-sipil/article/view/1714>.
- Clough, R.W. dan E.L. Wilson. (1999). “Early Finite Element Research at Berkeley”. In *The Fifth U.S. National Conference on Computational Mechanics*. Retrieved from <http://www.smart-fem.de/media/fe-history.pdf>.
- Cook, R.D., D.S. Malkus, dan M.E. Plesha. (1989). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. 3rd Edition. John Wiley & Sons, Ltd.
- Courant, R. (1943). “Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49, 1–23. Retrieved from <http://www.ams.org/journals/bull/1943-49-01/S0002-9904-1943-07818-4/S0002-9904-1943-07818-4.pdf>.
- Cui, X.Y., H. Feng, G.Y. Li, dan S.Z. Feng. (2015). A Cell-Based Smoothed Radial Point Interpolation Method (CS-RPIM) for Three-

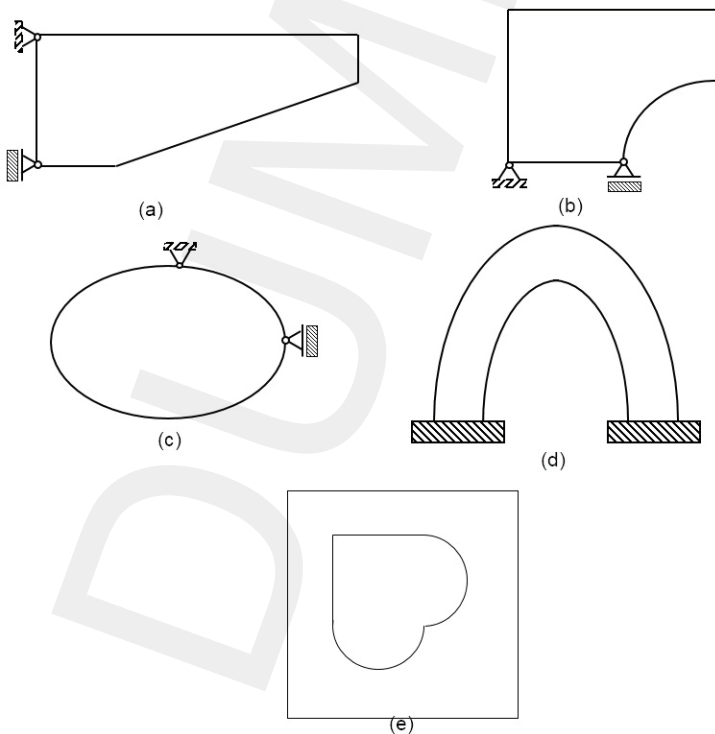
- Dimensional Solids”. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 50, 474–485. <http://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.09.017>.
- Felippa, C.A. (2016). “Introduction to Finite Element Methods (ASEN 5007) Course Material”. Retrieved October 14, 2016, from <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/>.
- “Finite Element Method-Gilbert Strang”. (n.d.). Retrieved October 31, 2016, from <https://www.youtube.com/watch?v=WwgrAH-IMOk>.
- Satria, B.L. dan L.S. Tanaya. (2016). *Implementasi Elemen Tetrahedron Linier dan Kuadratik untuk Analisis Tegangan Tiga Dimensi Menggunakan Program Matlab dan GID*. Universitas Kristen Petra.
- Taylor, R.L. (2008). “My Fifty Years with Finite Elements”. Retrieved October 1, 2016, from http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/presentations/rlt_venice.pdf.
- Turner, M.J., R.W. Clough, H.C. Martin, dan L.J. Topp. (1956). “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures”. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(9), 805–823. Retrieved from <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/8.3664?journalCode=jans>.
- Wong, F.T. (2009). *Kriging-Based Finite Element Method for Analyses of Plates and Shells*. Asian Institute of Technology, Pathumthani.
- Wong, F.T., Y. Christabel, P. Pudjisuryadi, dan W. Kanok-Nukulchai. (2015). “Testing of the Kriging-Based Finite Element to Shell Structures with Varying Thickness”. *Procedia Engineering*, 125, 843–849. <http://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.11.051>.

Soal-soal

1. Apa yang dimaksud dengan model matematis struktur?
2. Apakah itu model struktur diskrit dan kontinu? Berikan contohnya!
3. Apa yang dimaksud dengan metode elemen hingga?
4. Siapa yang menggunakan istilah “elemen hingga” untuk pertama kalinya? Mengapa dinamakan elemen hingga?
5. Saat ini banyak terdapat penjelasan atau kuliah MEH melalui video di situs YouTube. Salah satunya adalah video seri kuliah MEH oleh Prof. R. Krishnakumar dari *Indian Institute of Technology*. Tontonlah video Lec-01 dan Lec-02 dari Prof. R. Krishnakumar (cari di YouTube dengan

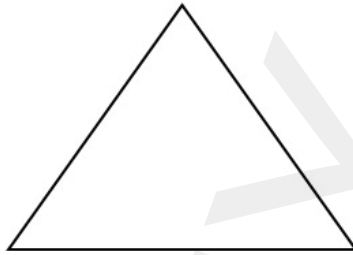
kata kunci “*Introduction to Finite Element Methods*”). Lalu tuliskan apa saja aplikasi MEH yang disebutkan dalam kedua kuliah tersebut!

6. Kunjungi salah satu situs program komersial MEH. Tuliskan gambaran singkat mengenai kegunaan program itu! Seandainya Anda membeli program itu, pekerjaan apakah yang dapat dilaksanakan dengan bantuan program itu?
7. Ceritakan dua contoh aplikasi program MEH yang Anda lihat (pada pertanyaan nomor 5)!
8. Mengapa pengguna program MEH perlu mempelajari konsep dasar MEH?
9. Apa motivasi Anda mempelajari MEH? Apa yang Anda harapkan?
10. Untuk melatih diskretisasi, cobalah bagi struktur bidang pada gambar-gambar soal 10 menjadi elemen-elemen segitiga atau segi empat. Pembagian yang lebih halus sebaiknya dilakukan pada daerah sekitar lubang dan sekitar tumpuan!



Gambar-gambar untuk Soal 10

11. Bagilah segitiga ini menjadi beberapa elemen segi empat (tidak boleh terdapat elemen segitiga)!



Gambar untuk Soal 11

12. Sebutkan langkah-langkah perhitungan metode kekakuan langsung!