PENELITIAN OPERASIONAL 1

Siana Halim

PETRA PRESS

ISBN 978-602-5446-96-2 (PDF)
9 786025 446962

PENELITIAN OPERASIONAL I

Penulis:
Siana Halim

Penerbit:

Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat
Universitas Kristen Petra
Surabaya

Penelitian Operasional I / Siana Halim
Surabaya, Bagian Penerbitan Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Universitas Kristen Petra, 2022

ISBN: 978-602-5446-96-2

Penelitian Operasional I
Cetakan Pertama, Februari 2022

Penulis:
Siana Halim

Penerbit:
Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat
Universitas Kristen Petra
Jl. Siwalankerto No. 121-131, Surabaya 60236
Telp. 031-2983139, 2983147; Fax. 031-2983111

Kata Pengantar

Buku Penelitian Operasional I ini dimaksudkan sebagai buku acuan untuk mata kuliah Optimasi I yang diselenggarakan di Program Studi Teknik Industri UK. Petra. Buku ini disarikan dari buku Hamdy A. Taha, Operation Research. Inti dari penelitian operasional research adalah pemodelan sistem yang dapat diselesaikan melalui pendekatan *linear programming*. Pemodelan adalah seni, untuk itu hanya membaca tanpa pernah melatih diri untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang diberikan dalam kelas ataupun yang akan dijumpai dalam keseharian tak akan menghasilkan buah yang manis.

Tentu saja ada banyak hal yang perlu ditambahkan pada buku ini. Mahasiswa tetap dianjurkan untuk membaca buku-buku Penelitian Operasional klasik, semacam *Operational Research* dari Hillier dan Lieberman ataupun Hamdy A. Taha. Mahasiswa yang tertarik pada teori matematis dianjurkan untuk membaca buku *Linear Programming and Network Flows* dari Bazaraa, Jarvis and Sherali. Selain itu mahasiswa juga dapat mempelajari *Spreadsheet Modeling & Decision Analysis* dari Ragsdale untuk mendapatkan wawasan penyelesaian masalah program linear dengan menggunakan Excel spread sheet.

Kiranya buku ini dapat membantu perkuliahan Optimasi I dan membuka wawasan mahasiswa untuk belajar lebih dalam.

Surabaya, Januari 2022

Siana Halim

DAFTAR ISI

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Sekilas Pandang tentang Penelitian Operasional

Tujuan umum dari penelitian operasional adalah untuk menentukan tindakan terbaik (paling optimal) dalam pengambilan suatu keputusan. Tindakan terbaik tersebut haruslah memperhatikan keterbatasan-keterbatasan yang ditimbulkan dari berbagai macam sumber (*resources*). Penyelesaian terbaik dapat diperoleh dengan cara melakukan pemodelan matematik serta menyelesaikannya dengan berbagai metode yang akan dipelajari dalam penelitian operasional ini.

Penelitian operasional (PO) merupakan suatu ilmu dan seni. PO dikatakan sebagai suatu ilmu dalam menyelesaikan suatu masalah, karena penyelesaian dengan menggunakan PO membutuhkan model matematik dan juga algoritma. Selain itu, dibutuhkan kreatifitas dalam memodelkan permasalahan ke dalam model matematik dan kemampuan perseorangan dalam menganalisa hasil suatu hasil yang akan digunakan untuk mengambil keputusan. Dalam hal ini PO dikatakan sebagau suatu seni memecahkan permasalahan.

1.2. Model Keputusan Sederhana

Suatu model keputusan dapat dipandang sebagai sarana untuk merangkum suatu masalah pengambilan keputusan. Hal ini dilakukan dengan cara mengidentifikasikan dan mengevaluasi secara sistematik seluruh alternatif keputusan yang ada dari masalah tersebut.

Contoh:
Manajer departemen produksi harus mengambil keputusan untuk membeli mesin automatik atau semiautomatik. Kedua mesin ini memiliki spesifikasi sebagai berikut:

	Biaya dalam Jutaan Rupiah	
	Semi automatik	Automatik
Biaya awal	20	50
Biaya peubah	0,6	0,4

Hal yang harus dilakukan untuk merumuskan situasi tersebut ke dalam suatu model keputusan adalah:

1. Mengidentifikasikan alternatif-alternatif yang ada untuk mengambil suatu keputusan
2. Merancang suatu kriteria untuk mengevaluasi nilai dari tiap alternatif
3. Menggunakan kriteria tersebut untuk mendapatkan yang terbaik.

Permasalahan di atas dapat dirumuskan menjadi:

1. Alternatif yang ada adalah:

   - membeli mesin automatik

   - membeli mesin semi automatik

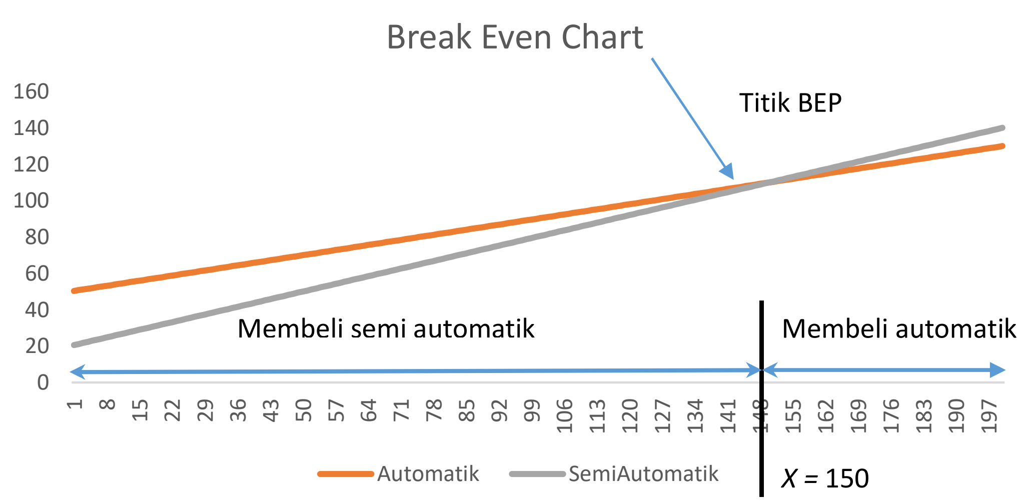
2. Tujuannya: memilih kriteria dengan biaya termurah

Penyelesaikan: Misalkan X: jumlah unit yang diproduksi

Biaya produksi = Biaya awal + (Biaya peubah) X

$$= \begin{cases} 50 + 0{,}4\,X & \text{untuk mesin automatik} \\ 20 + 0{,}6X & \text{untuk mesin semi automatik} \end{cases}$$

dengan menggunakan *break-even chart* didapatkan:



Gambar 1.1. *Break Even Chart* Model 1

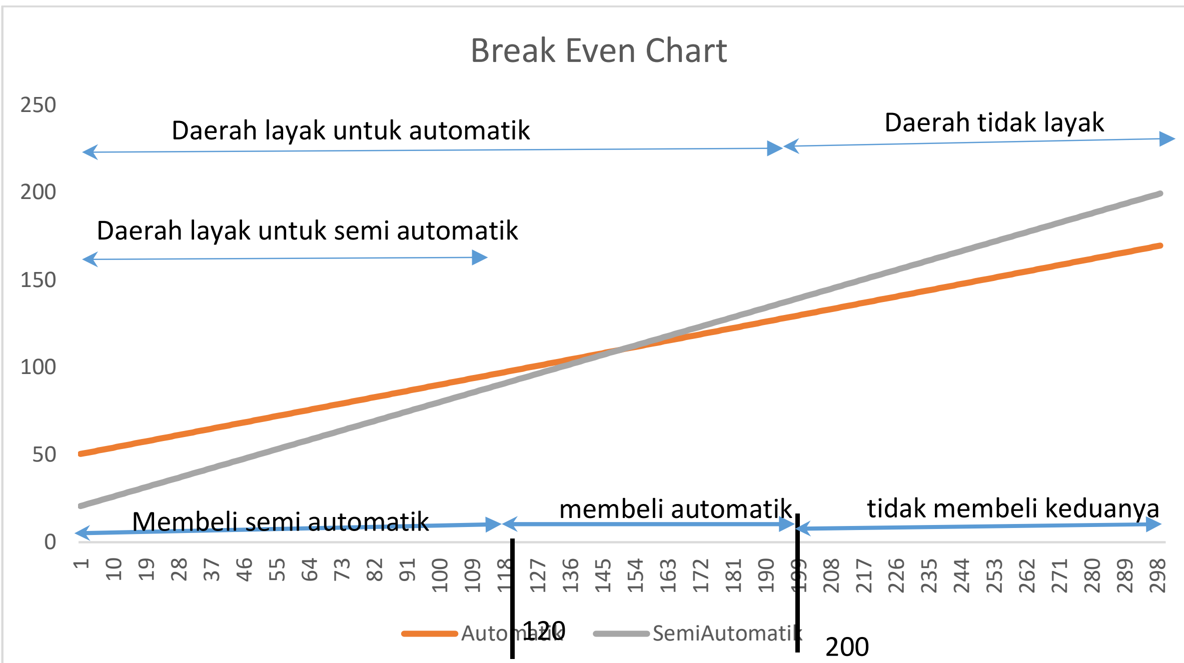
3. Solusi:

- Membeli mesin semi automatik jika produksinya kurang dari 150 unit

- Membeli mesin automatik jika produksinya lebih dari 150 unit

- Membeli mesin automatik atau semi automatik jika produksinya sama dengan 150 unit.

Solusi ini didasarkan atas asumsi bahwa kedua mesin memiliki kemampuan produksi yang sama jika diberikan waktu kerja yang sama. Andaikan pada kenyataannya kemampuan produksi dari mesin semi automatik adalah 15 unit/jam dan kemampuan produksi dari mesin automatik adalah 25 unit/jam, sedangkan jam kerja yang ada pada perusahaan tersebut adalah 8 jam dengan pergantian tunggal, maka solusi di atas akan berubah. Informasi ini menambah kendala baru pada masalah di atas. Produksi maksimum pada mesin automatic adalah 200 (= 20 * 8) dan pada mesin semi automatik adalah 120 (= 15*8).



Gambar 1.2. *Break Even Chart* Model 2

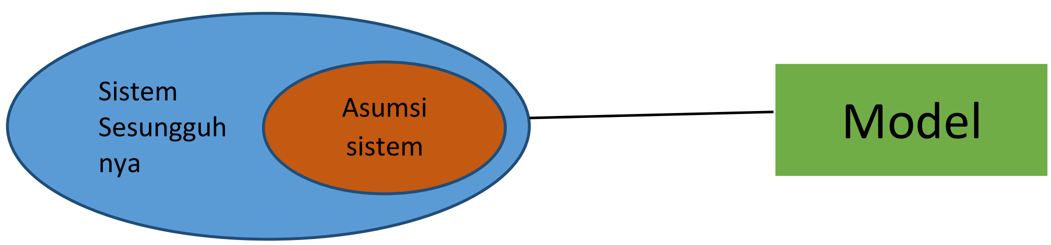
Kesimpulan:

- Kendala pada masalah pengambilan keputusan akan membatasi pilihan yang ada, yaitu dengan mengeliminasi alternatif tak layak. Semakin banyak kendala yang ada pada masalah pengambilan keputusan biasanya akan menghasilkan solusi yang lebih buruk.
- Secara umum model pengambilan keputusan terdiri dari:
    1. Alternatif dalam pengambilan keputusan berdasarkan seleksi
    2. Kendala-kendala yang ada untuk menentukan alternatif tak layak
    3. Kriteria:
        a. alternatif layak
        b. Tingkatan dalam pengambilan keputusan

1.3. Seni Membuat Model

Model dalam hal ini, didefinisikan sebagai fungsi tujuan beserta kendala-kendalanya sebagai peubah keputusan dari suatu masalah. Penyelesaian suatu model sekalipun tepat dan akurat tidak akan berguna jika model itu sendiri tidak mampu mewakili situasi sebenarnya.

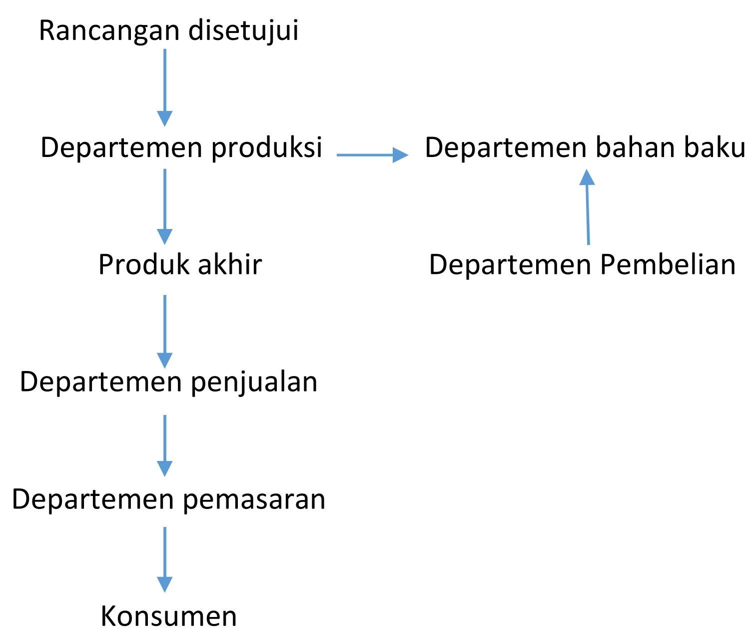
Walaupun dalam situasi sebenarnya, terdapat peubah dan kendala yang sangat banyak. Namun sebenarnya hanya sedikit saja peubah dan kendala yang benar-benar dominan dalam mewakili sistem nyata tersebut.



Gambar 1.3. Ilustrasi Pembuatan Model

Contoh:

Proses produksi dari rancangan sampai ke konsumen adalah sebagai berikut:



Tujuan: Menentukan kondisi terbaik di tiap-tiap tingkatan produksi.

Jika sistem di atas dipandang secara menyeluruh, maka akan didapat faktor-faktor yang sangat besar jumlahnya yang dapat mempengaruhi tingkat produksi misalnya:

1.	Departemen produksi:	tersedianya jam mesin, urutan operasi pada mesin, proses inventori, jumlah barang yang rusak pada tiap produksi dan rata-rata pengamatan.
2.	Departemen bahan dasar:	Tersedianya persediaan bahan, rata-rata pengiriman suatu pesanan dan keterbatasan gudang
3.	Departemen pemasaran:	Ramalan penjualan, iklan, kompetisi.

Jika dijabarkan maka akan didapat begitu banyak tugas yang membingungkan. Sistem di atas dapat diringkas menjadi dua titik pandang saja yaitu:

- Rata-rata produksi: mesin, buruh, urutan proses dan bahan baku
- Rata-rata konsumsi: keterbatasan system distribusi dan ramalan penjualan.

Kesimpulan:

- Pengurangan faktor-faktor yang mengendalikan sistem sedemikian hingga menjadi faktor dominan yang jumlahnya relatif lebih sedikit dan penyederhanaan model dari asumsi sistem nyata lebih merupakan suatu seni dibandingkan ilmu.
- Keabsahan dari suatu model dalam menggambarkan sistem nyata sangat tergantung pada kreatifitas, naluri dan imajinasi dari tim penelitian operasional, bukan kualitas perseorangan.

1.4. Tipe dari Model-Model Penelitian Operasional

Secara garis besar, penelitian operasional terbagi menjadi dua hal yaitu:

1. Model Matematik:
   A. Deterministik
      - Pemrograman Linear (*Linear Programming*): Simplex & Dualitas; Model Transportasi; Jaringan (*Network*)

- Pemrograman dengan bilangan bulat (*Integer Programming*)
- Pemrograman dinamik (*Dynamic Programming*)

B. Probabilistik

- Teori permainan (*Game Theory*)
- Penjadwalan proyek (*Project Scheduling*)
- Pengendalian persediaan (*Inventory Control*)
- Rantai Markov (*Markov Chain*)
- Teori antrian (*Quequing Theory*)

2. Simulasi

1.5. Tahapan dalam Mempelajari Penelitian Operasional

1. Mendefinisikan Masalah: Beberapa hal patut menjadi perhatikan, ketika mendefinisikan suatu masalah: mendefinisikan tujuan atau objektif dari masalah, mengidentifikasikan alternatif-alternatif keputusan yang terdapat pada sistem, menyadari adanya batasan-batasan kendala dan persyaratan-persyaratan pada sistem.
2. Membuat model: Tentukan model yang paling cocok dan mewakili sistem.
3. Menyelesaikan model
4. Menguji keabsahan model: Suatu model dikatakan sah jika model itu (walaupun tidak eksak mewakili sistem) dapat memberi prediksi tentang penampilan dari sistem itu.
5. Penerapan.

BAB 2
MEMBUAT MODEL MATEMATIK

2.1. Sekilas Pandang tentang Membuat Model

Tahapan-tahapan dalam mempelajari penelitian operasional adalah:
1. Merumuskan masalah
2. Membuat model matematik dari sistem yang sedang dipelajari atau dianalisa
3. Menentukan penyelesaian model.
4. Menguji model dan penyelesaiannya.
5. Menentukan kendali terhadap penyelesaian
6. Menerapkan model tersebut dalam sistem nyata.

2.1.1. Merumuskan Masalah

Langkah awal dalam suatu pekerjaan adalah mempelajari permasalahan dari suatu sistem, kemudian mendefinisikan dengan tepat masalah yang sedang dihadapi. Hal-hal yang dapat ditentukan dalam langkah ini adalah:
1. Tujuan/objektif dari apa yang akan dioptimumkan.
2. Kendala-kendala yang ada
3. Terdapat bermacam-macam hubungan yang ada antara bidang yang sedang dipelajari dengan bidang lain dalam suatu organisasi
4. Terdapat bermacam-macam alternatif yang mungkin dapat diambil dalam mengambil suatu tindakan
5. Keterbatasan waktu dalam mengambil keputusan.

2.1.2. Membuat Model Matematik

Model matematik dari suatu masalah adalah suatu sistem persamaan dan hubungan matematik yang menggambarkan inti dari masalah itu. Hal ini terdiri dari:
- Jika terdapat *n* relasi keputusan yang akan dibuat dan dapat diukur, maka hubungan ini dapat dituliskan sebagai berikut: Peubah keputusan (misalnya: $X_1, X_2, \ldots, X_n$)
- Pengukuran terhadap kinerja (misalnya: profit) dari suatu perusahaan dituliskan dalam fungsi matematik (misalnya: $P = 5X_1 + 7X_2 + \cdots + 10X_n$)

- Batasan-batasan yang terdapat pada variabel keputusan dapat dituliskan dalam persamaan ataupun pertidaksamaan matematik (misalnya: $X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 15$) dan disebut sebagai kendala.
- Tetapan-tetapan yang terdapat pada kendala dan fungsi tujuan disebut sebagai parameter dari model tujuan dari model matematik: Menentukan nilai-nilai dari peubah keputusan sedemikian hingga fungsi tujuannya maksimum ataupun minimum dan memenuhi kendala-kendala yang ada.

2.1.2.1. Menentukan Fungsi Tujuan

Menentukan fungsi tujuan yang tepat merupakan faktor yang penting dalam merumuskan masalah. Untuk itu siapa saja pengambil keputusan dalam suatu organisasi haruslah dikenal terlebih dahulu dan juga diketahui pola pikir individu tersebut terhadap tujuan. Pengambil keputusan merupakan penentu tepat tidaknya suatu tujuan dibuat.

Menentukan fungsi tujuan yang menyeluruh. Optimasi yang diperoleh hendaknya meliputi seluruh organisasi, dan bukan penyelesaian yang hanya optimal sebagian saja, penyelesaian yang hanya baik untuk satu komponen saja.

Menentukan fungsi tujuan untuk jangka panjang. Hal-hal yang berpengaruh dalam menentukan fungsi tujuan dari suatu perusahaan adalah:

1. Pemilik perusahaan (mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya)
2. Pegawai perusahaan (memerlukan kestabilan dalam bekerja dan gaji yang memadai)
3. Pelanggan (memerlukan produk berkualitas dengan harga yang memadai)
4. Penjual (mendapatkan harga jual yang memadai)
5. Pemerintah (memerlukan pajak sebagai pemasukan bagi negara)

2.1.3. Menentukan Penyelesaian dari Suatu Model

Terdapat beberapa macam perangkat lunak sebagai alat bantu dalam menyelesaikan suatu model dalam penelitian operasional a.l. AMPL, LINGO, CpLex, Excell – Optimization add on.

Bila penyelesaian eksak dari suatu model tidak dapat diperoleh, karena model yang sangat kompleks, maka masalah tersebut dapat diselesaikan secara heuristik. Heuristik adalah cara/prosedur sederhana yang dapat digunakan untuk membantu memecahkan persoalan yang sulit/kompleks. Penyelesaian secara heuristik ini sering kali tidak sempurna dan hanya memberikan jawaban mendekati optimum. Selain penyelesaian secara heuristik, dalam menentukan penyelesaian suatu model hal terpenting lainnya adalah melakukan analisa setelah kondisi optimal dicapai (*post-optimality analysis*) dan analisa terhadap kepekaan suatu model (*sensitivity analysis*).

2.1.4. Menguji Model dan Penyelesaiannya

Hal-hal yang perlu dilakukan dalam menguji suatu model dan penyelesaiannya adalah:

1. Periksa ada tidaknya kesalahan, uji ulang perumusan dari masalah dan bandingkan dengan model yang telah dibuat.
2. Yakinkan bahwa penggunaan dimensi matematik yang digunakan dalam model konsisten.
3. Hal terpenting yang harus diperhatikan adalah ada tidaknya pengaruh model lalu dengan model yang akan dibuat mendatang. Jika tidak ada pengaruhnya maka model yang akan data pasti jauh berbeda bila dibandingkan dnegan model yang lalu. Untuk itu perlu dilakukan uji periodik.

2.1.5. Menentukan Pengendalian terhadap Penyelesaian

Tentukan prosedur yang sistematik untuk mendeteksi perubahan dan mengendalikan suatu penyelesaian. Untuk itu perlu diidentifikasikan parameter-parameter yang peka melalui analisis kepekaan.

2.1.6 Penerapan Sistem Nyata

Pada tahapan inilah model diterapkan pada sistem nyata dan penyelesaianya secara akurat ditranslasikan pada pelaksanaan.

BAB 3
MERUMUSKAN MODEL LINEAR DAN MENYELESAIKAN MODEL SEDERHANA DENGAN GRAFIK

3.1. Model Linear dengan Dua Peubah

Penyelesaian dengan menggunakan bantuan grafik ini hanya tepat digunakan jika peubah keputusan yang ada jumlahnya tidak lebih dari dua.

Contoh 1.

Suatu perusahaan cat memproduksi dua macam cat yaitu cat tembok dan cat kayu. Untuk produksi ini digunakan dua macam bahan dasar, A dan B. Persediaan bahan dasar A maksimum 6 ton per hari, sedangkan untuk bahan dasar B maksium 8 ton per hari. Kebutuhan akan bahan dasar A dan B adalah sebagai berikut:

Kebutuhan Bahan Dasar (Ton)

	Cat Kayu	Cat Tembok	Kebutuhan Maksimum (Ton)
Bahan A	1	2	6
Bahan B	2	1	8

Berdasarkan survey didapat bahwa permintaan/hari untuk cat tembok tak mungkin melebihi cat kayu lebih dari 1 ton. Selain itu permintaa/hari maksimum dari cat tembok terbatas hingga 2 ton/hari. Harga cat kayu adalah 3juta/ton dan untuk cat tembok adalah 2juta/ton. Tentukan berapa cat kayu dan cat tembok yang harus diproduksi/hari agar diperoleh pendapatan kotor/hari maksimal.

Membuat Model Matematik

1. Tentukan peubah-peubah keputusannya
2. Tentukan kendala-kendala yang ada pada sistem
3. Tentukan tujuan yang diinginkan

Peubah Keputusan – karena yang akan ditentukan adalah jumlah dari cat kayu dan cat tembok yang akan diproduksi, maka peubah dari model ini dapat didefinisikan sebagai berikut:

X_1: produksi cat kayu/hari/ton

X_2: produksi cat tembok/hari/ton

Fungsi Tujuan – karena tujuan dari masalah ini adalah mendapatkan pendapatan kotor/hari maksimal dan diketahui bahwa harga cat kayu adalah 3 juta/ton dan harga cat tembok adalah 2 juta/ton, maka fungsi tujuan dapat ditentukan sebagai berikut:

Maks: $Z = 3X_1 + 2X_2$ (dalam jutaan)

Kendala-kendala yang ada

- Penggunaan bahan untuk kedua macam cat <= maksimum bahan yang tersedia

  $X_1 + 2X_2 \leq 6$ (Bahan A)

  $2X_1 + X_2 \leq 8$ (Bahan B)

- Kelebihan jumlah antara cat tembok dan cat kayu <= 1 ton/hari

  $X_2 - X_1 \leq 1$

- Permintaan cat tembok <= 2 ton/hari

  $X_2 \leq 2$

- Produksi cat kayu dan cat tembok tidak mungkin negative

  $X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$

Tentukan berapa ton cat kayu dan cat tembok, X_1 dan X_2, yang akan diproduksi agar didapat:

Maks: $Z = 3X_1 + 2X_2$ (Fungsi Tujuan)

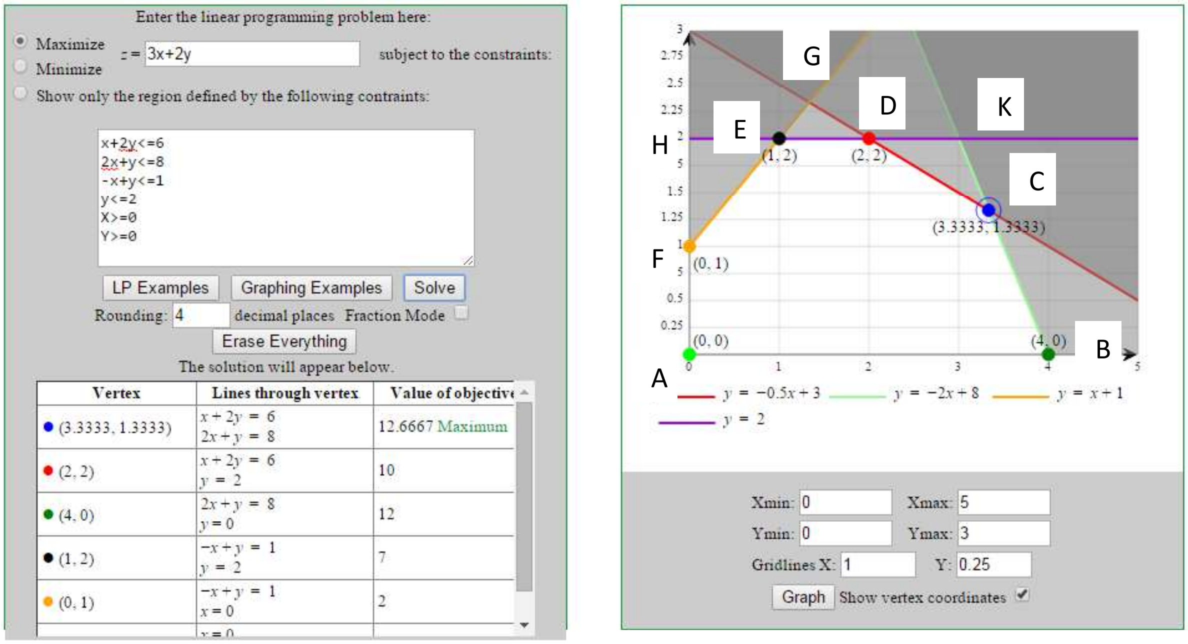
Kendala:

$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_2 - X_1 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$$

Nilai dari X_1 dan X_2 dikatakan sebagai penyelesaian yang layak (*feasible solution*) jika memenuhi seluruh kendala yang terdapat pada model.

Model ini merupakan suatu *linear program*, karena fungsi-fungsinya (kendala dan tujuannya) linear.

Solusi grafik:



Gambar 3.1. Grafik Solusi

http://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en

Penyelesaian di atas merupakan model linear yang harus memenuhi syarat-syarat kelinearan sebagai berikut:

1. Syarat Sebanding

   Tiap-tiap peubah yang digunakan dalam fungsi tujuan maupun dalam penggunaan sumber (*resource*) harus sebanding terhadap nilai dari peubahnya.

2. Syarat Penjumlahan

   Fungsi tujuan merupakan jumlahan dari peubah-peubah yang berbeda yang terdapat pada suatu masalah, demikian juga untuk ruas kiri dari tiap kendala harus merupakan jumlah dari tiap penggunaan pada tiap-tiap peubah dari sumber yang bersesuaian

3. Syarat Dapat Dibagi

   Asumsi dapat dibagi adalah unit-unit kegiatan dapat dibagi ke dalam bagian sekecil-kecilnya, sehingga nilai-nilai bukan bilangan bulat yang dihasilkan untuk peubah-peubah keputusan adalah mungkin

4. Syarat Kepastian

   Asumsi mengenai kepastian adalah semua parameter model (a_{ij}, b_i dan c_j) merupakan tetapan-tetapan yang diketahui. Dalam praktek jarang dipenuhi secara tepat. Parameter-

parameter yang dipakai seringkali diperoleh berdasarkan prediksi mengenai kondisi-kondisi di masa mendatang dan tidak pasti. Oleh karena itu diperlukan analisa kepekaan secara mendalam.

3.2. Analisis Kepekaan

Analisis kepekaan adalah suatu prosedur yang biasa dilakukan setelah penyelesaian optimal didapat. Hal ini dilakukan untuk menentukan seberapa peka suatu penyelesaian optimal terhadap perubahan yang mungkin terjadi pada model awal.

3.2.1 Kepekaan Ruas Kanan (*Kepekaan Problem 1*)

Berapa banyak suatu sumber bertambah/berkurang

Ada 2 tipe yaitu:

1. Sampai seberapa banyak suatu sumber masih mungkin bertambah sedemikian hingga nilai optimum dari fungsi tujuan Z bertambah.
2. Sampai seberapa banyak suatu sumber dapat berkurang sedemikian hingga nilai optimum dari fungsi tujuan Z tetap.

Untuk menjawab kedua pertanyaan di atas, maka kendala-kendala dari suatu permasalahan harus diklasifikasikan terlebih dahulu.

- Suatu kendala dikatakan TERIKAT (*binding*) jika kendala tersebut melewati titik optimum.
- Suatu kendala dikatakan TAK TERIKAT (*nonbinding*) jika kendala tersebut tidak melewati titik optimum.

Pada contoh di atas, kendala 1 dan kendala 2 terbatas (*bounded*). Secara logis, jika suatu kendala itu terbatas maka sumber yang ada itu pasti susah diperoleh (*scarce*). Namun jika kendala itu tidak terikat maka sumber yang ada itu pasti berlebihan (*abundant*).

Pada kasus kepekaan ruas kanan ini, hal-hal yang perlu diperhatikan adalah:

1. Seberapa banyak suatu sumber (*resource*) yang terbatas dapat ditambah sedemikian hingga penyelesaian optimalnya bertambah.

2. Sebarapa banyak suatu sumber (resource) yang berlebihan dapat dikurangi, tetapi tidak mempengaruhi penyelesaian optimalnya.

3.2.2 Kepekaan Problem 2

Sumber (*resource*) mana yang akan ditingkatkan?

Misalkan Y_i: nilai tambah/unit dari sumber ke-i

$$Y_i = \frac{\text{Perubahan Maksimal pada nilai Optimum } Z}{\text{Pertambahan Maksimal pada Sumber ke-}i}$$

Dengan memperhatikan nilai Y_i maka sumber yang harus ditingkatkan adalah sumber yang memiliki nilai Y_i paling besar.

3.2.3 Kepekaan pada Fungsi Tujuan

Berapa banyak perubahan yang diperbolehkan pada koefisien dari fungsi tujuan?

Perubahan pada tetapan fungsi tujuan dapat mempengaruhi kemiringan dari garis lurus yang diwakilinya. Selain itu, hal ini dapat pula mengubah status dari kendala yang terikat dan status dari sumber (*resource*), baik itu sumber terbatas (*scarce*) ataupun berlebihan (*abundant*).

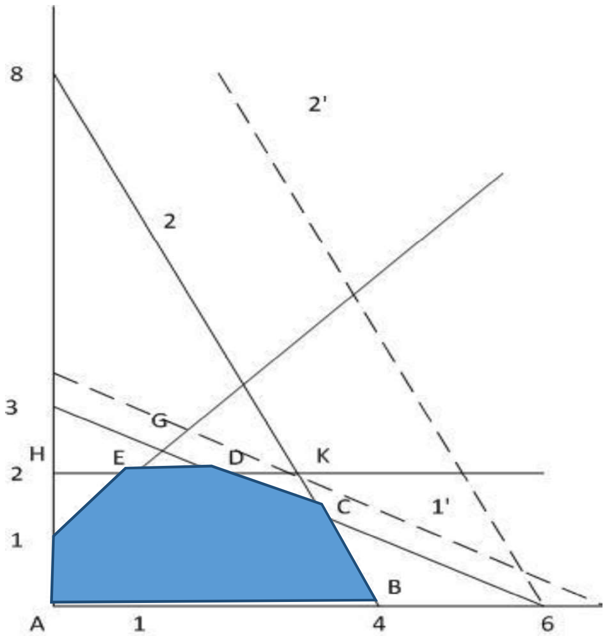
Analisa kepekaan dari tetapan fungsi tujuan terdiri dari:

1. Berapa banyak suatu tetapan fungsi tujuan dapat diubah (bertambah atau berkurang) tanpa menyebabkan perubahan pada titik optimalnya.
2. Berapa banyak suatu tetapan fungsi tujuan dapat diubah agar status dari sumber berubah (dari berlebihan menjadi terbatas, dan sebaliknya)

Perhatikan contoh 1 di atas.

Kepekaan Problem 1

Sumber 1 dan Sumber 2 terbatas, berarti dapat ditambah



1: Titik K, perpotongan antara 2&4

$$2X_1 + X_2 = 8; X_2 = 2;\ X_1 = 3$$

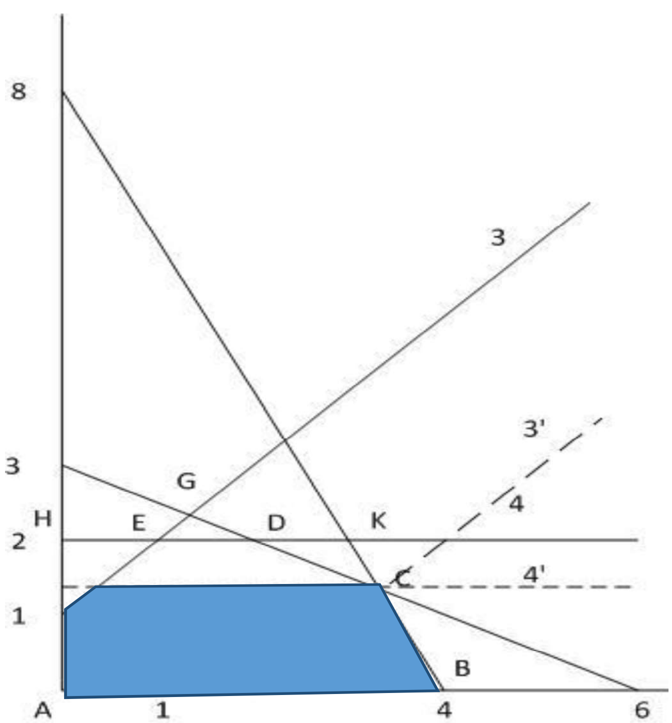
Menjadi 1': $X_1 + 2X_2 = 3 + 2(2) = 7$

$2X_1 + X_2 \leq 7; Z = 3(3) + 2(2) = 13$

2': Titik L (6,0)

$2X_1 + X_2 \leq 12; Z = 3(6) + 2(0) = 18$

Sumber 3 dan Sumber 4 berlebihan (*abundant*) berarti harus dikurangi



Titik C (3,33; 1, 33)

3': $-X_1 + X_2 = \ -3{,}33 + 1{,}33 = \ -2$

$-X_1 + X_2 \leq \ -2$ atau

$X_1 - X_2 \geq \ 2$

$Z = 12{,}667$

4': $X_2 \leq 1{,}333; Z = 12{,}667$

Kesimpulan:

Sumber	Tipe	Perubahan Maksimum pada sumber (ton)	Perubahan maksimum pada Z (jutaan)
1	Terbatas	7-6 = 1	13- 12,667 = 1,333
2	Terbatas	12-8 = 4	18 – 12,667= 5,333
3	Berlebihan	-1-2 = -3	12,667 – 12,667 = 0
4	Berlebihan	1,333- 2 = 0,667	12,667 – 12,667 = 0

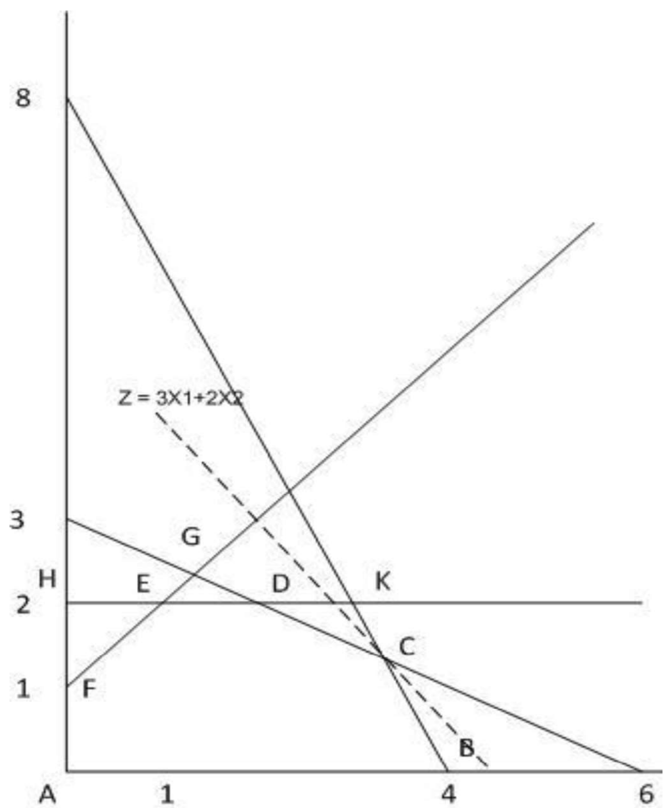
Kepekaan Problem 2

$Y_1 = \frac{13-12,667}{7-6} = 0,333$ juta/ton, artinya tiap kenaikan 1 ton Bahan A akan meningkatkan penerimaan sebesar 0,333 juta.

$Y_2 = \frac{18-12,667}{12-8} = 1,333$ juta/ton, artinya tiap kenaikan 1 ton Bahan B akan meningkatkan penerimaan sebesar 1,333 juta.

Karena $Y_2 > Y_1$ maka bahan baku B mendapat prioritas untuk ditingkatkan.

Kepekaan Problem 3



$Z = 3X_1 + 2X_2$

$Z = C_1X_1 + C_2X_2$

Gradien garis Z: $X_2 = Z/C_2 - C_1/C_2\ X_1$

Jika nilai C_1/C_2 makin besar berarti arc tg (C_1/C_2) makin besar, sehingga sudut garis Z terhadap sumbu X_1, makin besar. Berarti garis Z makin tegak.

α : sudut garis Z terhadap sumbu X_1 +

$-\alpha$: sudut garis Z terhadap sumbu X_1 −

= arc tg($-C_1/C_2$)

Nilai $-C_1/C_2$ dapat bertambah besar sampai garis Z berimpit dengan garis kendala2, karena berimpit maka gradiennya akan sama dengan $2X_1 + X_2 = 8$; $X_2 = 8 - 2X_1$. Berarti $-C_1/C_2 = -2$ atau $C_1/C_2 = 2$.

Nilai $-C_1/C_2$ dapat diperkecil sampai garis Z berimpit dengan garis kendala 1, karena berimpit maka gradiennya akan sama dengan $X_1 + 2X_2 = 6;\ X_2 = 3 - 1/2X_1$.

Berarti $-C_1/C_2 = -1/2$ atau $C_1/C_2 = 1/2$

Jadi *range* perubahan pada harga sebesar: $\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{C_2} \leq 2$.

3.3. Merumuskan Model Linear

Tujuan dasar dalam membangun suatu model linear programming dari suatu permasalahan operasional adalah agar dapat memperkirakan bagaimana seharusnya solusi optimal yang diberikan oleh kondisi-kondisi awal. Berikut akan diberikan beberapa contoh dalam merumuskan model linear.

Secara umum model linear dapat dituliskan sebagai:

$\max Z = f(X)$	atau	$\min w = g(Y)$
s.d. h $AX \leq b$		s.d.h $BY \geq c$
$X \geq 0$		$Y \geq 0$

Dimana X, Y adalah vektor peubah keputusan, A, B adalah matriks koefisien dan b, c adalah vektor koefisien yang menyatakan keterbatasan sumber (*resources*).

Contoh 1.

Bank ABC mengalokasikan \$12juta untuk pemberian kredit pada nasabahnya untuk tiga bulan berikut. Tabel di bawah ini memberikan data tentang tingkat suku bunga, jenis pinjaman dan kemungkinan kredit macet yang diperkirakan dari pengalaman masa lalu:

Tipe pinjaman	Bunga	Probabilitas kredit macet
Perseorangan	0,14	0,1
Mobil	0,13	0,07
Rumah	0,12	0,03
Pertanian	0,125	0,05
Komersial	0,1	0,02

Kredit macet diasumsikan tak dapat diselamatkan dan tidak menghasilkan bunga. Kompetisi dengan bank-bank lain mengharuskan Bank ABC untuk mengalokasikan sekurang-kurangnya 40% dari total dana untuk pinjaman pertanian dan komersial. Pinjaman perumahan setidak-tidaknya kurang dari atau sama dengan 50% dari pinjaman mobil, perseorangan dan perumahan. Bank mengambil kebijakan bahwa rasio kredit macet terhadap total pinjaman tak boleh lebih dari 4%. Tentukan model matematikanya.

Penyelesaian:

Variabel Keputusan:

X_1	:	Pinjaman perseorangan
X_2	:	Mobil
X_3	:	Rumah
X_4	:	Pertanian
X_5	:	Komersial

Fungsi Objektif: $Z = 0{,}14(0{,}9\ X_1) + 0{,}13(0{,}93\ X_2) + 0{,}12(0{,}97X_3) +$

$0{,}125(0{,}95X_4) + 0{,}1(0{,}98X_5)$

$-0{,}1X_1 - 0{,}7X_2 - 0{,}3X_3 - 0{,}05X_4 - 0{,}02\ X_5$

$$Z = 0{,}026X_1 + 0{,}0509X_2 + 0{,}0864X_3 + 0{,}06875X_4 + 0{,}078X_5$$

Kendala:

1. Dana keseluruhan yang tersedia

   $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 12$

2. Pinjaman untuk pertanian dan komersial

   $X_4 + X_5 \geq 4{,}8$ (dari 0,4*12)

3. Pinjaman untuk perumahan

   $X_3 \geq 0{,}5(X_1 + X_2 + X_3)$

4. Batas terhadap kredit macet

   $$\frac{0{,}1X_1 + 0{,}07\ X_2 + 0{,}03\ X_3 + 0{,}05\ X_4 + 0{,}02\ X_5}{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5} \leq 0{,}04$$

   $0{,}06X_1 + 0{,}03X_2 - 0{,}01X_3 + 0{,}01X_4 - 0{,}02X_5 \leq 0$

5. Nonnegatif

   $X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0; X_4 \geq 0;\ X_5 \geq 0$

Contoh 2.

PT “Suka Membangun” memiliki 800 are lahan kosong. PT tersebut akan membangun rumah RSS, RS1 dan RS2. Kebijakan pemerintah mengharuskan:

- Perbandingan RSS dengan total rumah yang akan dibangun sekurang-kurangnya adalah 50%
- Perbandingan lahan dari ketiga tipe rumah adalah 2:3:4 dan 1 untuk tempat rekreasi tiap 200K.

Perusahaan memperkirakan 15% lahan akan digunakan untuk jalan. Keuntungan yang didapat adalah:

Tipe	RSS	RS1	RS2
Untung/Unit ($)	10.000	15.000	20.000

Untuk menarik minat konsumen PT “Suka Membangun” menawarkan fasilitas air bersih. Total biaya service air $100.000 dan batasannya 200.000 gallon/hari. Perkiraan pemakaian adalah sebagai berikut:

Tipe	RSS	RS1	RS1	Rekreasi
Biaya layanan / unit($)	1000	1200	1400	800
Konsumsi air / unit($)	400	600	840	450

Tentukan model matematikanya.

Model matematika:

Peubah keputusan:

X_1 : Jumlah unit RSS
X_2 : Jumlah unit RS1
X_3 : Jumlah unit RS2
X_4 : Area rekreasi

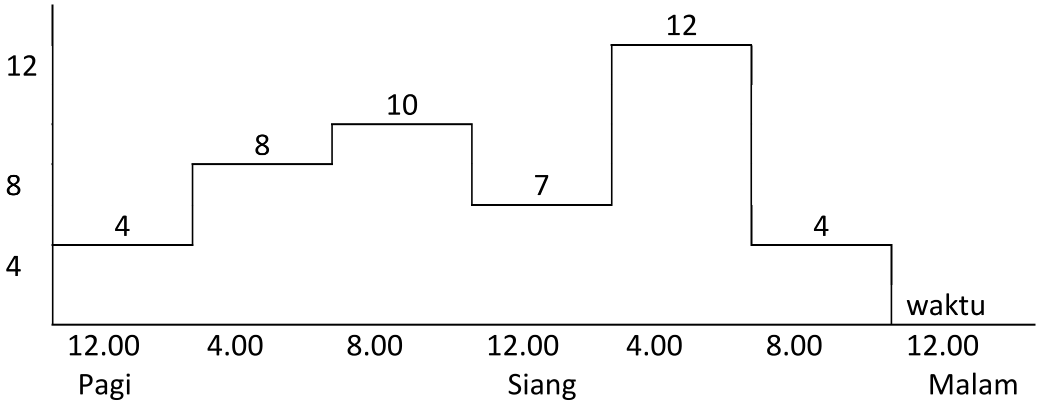
Fungsi tujuan: $Max\ Z = 10000X_1 + 15000X_2 + 2000X_3$

Kendala:

1. Keterbatasan lahan: $2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 680$
2. RSS: $\frac{X_1}{X_1+X_2+X_3} \geq 0{,}5$ atau $0{,}5\ X_1 - 0{,}5\ X_2 - 0{,}5\ X_3 \geq 0$
3. Area rekreasi: $X_4 \geq \frac{X_1+2X_2+3X_3}{200}$ atau $200X_4 - X_1 - 2X_2 - 3X_3 \geq 0$
4. Modal: $1000X_1 + 1200X_2 + 1400X_3 + 800X_4 \geq 100000$
5. Konsumsi air: $400X_1 + 600\ X_2 + 840\ X_3 + 450X_4 \geq 200000$
6. Nonnegatif: $X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0;\ X_4 \geq 0$

Contoh 3

Untuk mengurangi polusi udara di sebuah kota walikota akan mengoptimalkan jumlah bus kota yang beroperasi di jalan. Data jumlah bus yang ada di kota itu adalah sebagai berikut:



Tiap bus hanya boleh beroperasi 8 jam berturut-turut dalam 1hari.

Model matematika:

Peubah keputusan:

X_1	:	Jumlah bus yang berangkat pada jam 12:01 dini hari
X_2	:	Jumlah bus yang berangkat pada jam 04:01 pagi hari
X_3	:	Jumlah bus yang berangkat pada jam 08:01 pagi hari
X_4	:	Jumlah bus yang berangkat pada jam 12:01 siang hari
X_5	:	Jumlah bus yang berangkat pada jam 04:01 sore hari
X_6	:	Jumlah bus yang berangkat pada jam 08:01 malam hari

Fungsi tujuan: $Min\ Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

Kendala:

$X_1 + X_6 \geq 4$ (12:01 – 04:00 pagi)

$X_1 + X_2 \geq 8$ (04:01 – 08:00 pagi)

$X_2 + X_3 \geq 10$ (08:01 –12:00 siang)

$X_3 + X_4 \geq 7$ (12:01 –04:00 siang)

$X_4 + X_5 \geq 12$ (04:01 –08:00 sore)

$X_5 + X_6 \geq 4$ (08:01 –12:00 malam)

$X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0;\ X_4 \geq 0; X_5 \geq 0;\ X_6 \geq 0$

Contoh 4: Perusahaan pemotongan kertas menerima pesanan sbb:

Pesanan	Lebar kertas (feet)	Jumlah pesanan (Rol)
1	5	150
2	7	200
3	9	300

Jika panjang 1 rol kertas sebelum dipotong adalah 20 feet. Tentukan model matematikanya agar sisa kertas yang terbuang minimum.

Model matematika

Pisau pemotong kertas dapat diatur dengan ukuran sebagai berikut:

Pengaturan pisau pemotong kertas

Lebar yang dibutuhkan	1	2	3	4	5	6	Jumlah minimum gulungan
5	0	2	2	4	1	0	150
7	1	1	0	0	2	0	200
9	1	0	1	0	0	2	300
Sisa potongan kertas	4	3	1	0	1	2	

Peubah keputusan:

X_i: jumlah gulungan yang diperoleh dari hasil pemotongan dengan ukuran i ; $i = 1, \ldots, 6$

Y_j: jumlah kelebihan gulungan kertas dengan ukuran 5, 7 dan 9 feet

Jumlah gulungan 5 feet yang diproduksi = $2X_2 + 2X_3 + 4X_4 + X_5$

Jumlah gulungan 7 feet yang diproduksi = $X_1 + X_2 + 2X_5$

Jumlah gulungan 9 feet yang diproduksi = $X_1 + X_3 + 2X_6$

Jumlah kelebihan gulungan kertas dengan ukuran 5,7 dan 9 feet

$$Y_1 = 2X_2 + 2X_3 + 4\,X_4 + X_5 - 150$$

$$Y_2 = X_1 + X_2 + 2X_5 - 200$$

$$Y_3 = X_1 + X_3 + 2X_6 - 300$$

Fungsi tujuan: $Min\ Z = 4X_1 + 3X_2 + X_3 + X_5 + 2X_6 + 5Y_1 + 7Y_2 + 9Y_3$

Kendala:

$$2X_2 + 2X_3 + 4\,X_4 + X_5 - Y_1 = 150$$

$$X_1 + X_2 + 2X_5 - Y_2 = 200$$

$$X_1 + X_3 + 2X_6 - Y_3 = 300$$

$$X_i \geq 0; i = 1, \ldots, 6;\ Y_j \geq 0; j = 1,2,3$$

Latihan

Buat model matematika untuk masalah berikut dan selesaikan dengan menggunakan Geogebra

1. Berikut adalah data produk A dan B.

   Waktu proses

Produk	Dept 1	Dept II	CM/unit (ribuan)
A	6 jam	20 jam	Rp 16
B	15 jam	10 jam	Rp 12
Kapasitas	112 jam	170 jam	

   Rumuskan model matematis kasus ini.

2. Perusahaan sirup Segar memasarkan produknya dalam dua macam kemasan, yaitu Regular dan Special yang menghasilkan Contribution Margin per botol Rp 300,- dan Rp 400,-. Setiap minggu kemasan regular dan special membutuhkan gula 2000 kg dan 3000 kg untuk setiap botol yang diproduksi. Dalam hal ini, pemasok hanya mampu menyediakan gula paling banyak 1200 ton per minggu. Setiap botol kemasan regular memerlukan waktu proses 12 menit sedang kemasan special memerlukan waktu proses 30 menit. Kapasitas proses yang tersedia untuk memproduksi dua macam kemasan ini adalah 160 jam per minggu. Bila diketahui permintaan kedua jenis kemasan 500 botol per minggu. Rumuskan model matematis kasus ini.

3. Selesaikan dengan Geogebra:

   Max Z = 40 X1 + 30 X2

   Kendala:

   2 X1 +   X2 <= 20

   2 X1 + 3 X2 <= 32

   2 X1 -   X2>= 0

   X2>= 2

4. Selesaikan dengan Geogebra:

   Min W = 20 X1 + 30 X2

   Kendala:

   2 X1 +   X2 >= 10

   X1 + 2 X2 <= 14

   X1 + 4 X2 >= 12

   X1 - 8 X2<=   0

   X1   <= 8

Tentukan Penyelesaian dari Masalah berikut. Berikan ulasan, tentang penyelesaian yang anda dapatkan.

5. Max $z = 3x_1 + 2x_2$

   s.t $4x_1 - x_2 \leq 8$

   $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

   $4x_1 + x_2 \leq 8$

   $x_1, x_2 \geq 0$

6. Max $z = \frac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4$

   s.t $\frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$

   $\frac{1}{2}x_1 - 12\,x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0$

   $x_3 \leq 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

7. Max $z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

8. Max $z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$

$$3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \leq 50$$
$$x_1 \qquad + \ x_3 \leq 10$$
$$x_1 - \ x_2 + 4x_3 \leq 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

9. Max $z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Buatlah model matematik dari masalah berikut:

10. Perusahaan akan memproduksi 3 macam produk, A B dan C yang akan menghasilkan contribution margin masing-masing Rp 8000, Rp 5000,- dan Rp 1000. Produk-produk tersebut menggunakan mesin yang memiliki kapasitas 400 jam. Setiap unit produk A, B dan C masing-masing menggunakan kapasitas mesin 2 jam, 3 jam dan 1 jam. Untuk periode yang akan datang hanya tersedia 150 unit komponen khusus yang akan dipergunakan oleh Produk A dan C. Campuran khusus yang akan digunakan masing-masing oleh A dan C masing-masing 2 Kg/unit dan 4 kg/unit hanya tersedia 200 Kg. Perusahaan telah membuat kesepakatan dengan asosiai dagang bahwa produk B tidak diproduksi lebih dari 50 unit. Buat model matematiknya.
11. Vega Ad's merencanakan sebuah program kampanye untuk kliennya. Dari hasil penelitian dipilih media Harian Nasional, Radio dan Majalah. Vega Ad's hendak menjangkau sebanyak mungkin audiensi dengan mengeluarkan anggaran sebesar lima juta. Berikut informasi yang diberkaitan dengan rencana tersebut:

Media yang dipilih

	Harian	Radio	Majalan
Biaya per spot*	2000	1000**	3000
Frekuensi	2 kali	60 kali	1 kali
Jumlah audiensi	1 juta	500.000	100.000

*)dalam ribuan Rupiah **) untuk 10 stasiun radio

BAB 4
Solusi Aljabar

4.1. Bentuk Baku dari Model Program Linear

Model program linear memiliki 3 tipe kendala yaitu $\leq; =; \geq$ peubah-peubah yang ada mungkin non negative atau tak terbatas (*unrestricted*). Untuk memperoleh penyelesaian secara umum maka model program linear harus dibawa ke dalam bentuk baku.

Sifat-sifat dari bentuk baku adalah:

1. Kendala yang ada harus berupa "=" dengan suku kanan non negative
2. Peubah-peubah yang ada harus negative
3. Fungsi tujuan boleh maksimum ataupun minimum

4.1.1 Kendala

1. Kendala dengan tipe $\leq$ $(\geq)$ dapat diubah menjadi tanda "=" dengan menambahkan *slack variabel* pada suku kiri dari kendala.

   Contoh 1: $X_1 + 2X_2 \leq 6$ dapat diubah menjadi $X_1 + 2X_2 + \ S_1 = 6;\ S_1 \geq 0$

   Jika kendala tersebut mewakili batas penggunaan dari suatu *resource*, maka S_1 akan mewakili *slack* atau jumlah *resource* yang tidak digunakan.

   Contoh 2: $3X_1 + 2X_2 - 3X_3 \geq 5$ dapat diubah menjadi $3X_1 + 2X_2 - 3X_3 - \ S_2 = 5;\ S_2 \geq 0$

   S_2 mewakili peubah surplus.
2. Suku kanan dari suatu peubah selalu dapat dibuat nonnegative dengan mengalikan kedua ruas dengan -1.

   Contoh 3: $2X_1 + 3X_2 - 7X_3 = -5$ dapat diubah menjadi $-2X_1 - 3X_2 + 7X_3 = 5$
3. Tanda pertidaksamaan harus dibalik bila kedua ruas dikalikan dengan -1.

   Contoh 4: $2X_1 - X_2 \leq -5$ dapat diubah menjadi $-2X_1 + X_2 \geq 5$

4.1.2 Peubah

Peubah yang tak terbatas Y_i dapat dituliskan dalam dua peubah nonnegatif dengan menggunakan substitusi: $Y_i = Y_i' - Y_i"$ dengan $Y_i', Y_i" \geq 0$. Penggantian ini berlaku untuk seluruh kendala dan fungsi tujuan. Pada solusi optimal (dengan menggunakan simplex) hanya satu dari dua peubah yang dapat diasumsikan memiliki nilai positf, tetapi bukan keduanya. Jadi bila $Y_i' > 0$ maka $Y_i" = 0$ dan sebaliknya. Jika Y_i adalah peubah *slack* dan peubah surplus, maka Y_i' merupakan peubah *slack* dan $Y_i"$ merupakan peubah surplus.

Contoh 5:

Fungsi tujuan: $\min Z = 2X_1 + 3X_2$

Kendala:

$X_1 + X_2 = 10$

$-2X_1 + 3X_2 \leq -5$

$7X_1 - 4X_2 \leq 6$

X_1 tak terbatas (*unbounded*)

$X_2 \geq 0$

Fungsi tujuan: $\min Z = 2X_1' - 2X_1" + 3X_2$

Kendala:

$X_1' - X_1" + X_2 = 10$

$2X_1' - 2X_1" - 3X_2 - S_2 = 5$

$7X_1' - X_1" - 4X_2 + S_3 = 6$

$X_1', X_1", X_2, S_2, S_3 \geq 0$

4.1.3 Fungsi Tujuan

$Max\ (Z) = -Min(-Z)$

Contoh 6: $Max(3,5,12) = 12; -Min(-3,-5,-12) = -(-12) = 12$

4.2. Metode Simplex

Untuk menjelaskan tentang metode simplex digunakan contoh soal sebagai berikut:

Dalam memproduksi dua macam container K dan L digunakan 2 macam mesin yaitu M1 dan M2. Untuk memproduksi K digunakan M1 selama 2 menit dan M2 selama 4 menit. Untuk memproduksi L digunakan M1 selama 8 menit dan M2 selama 4 menit. Baik mesin M1 ataupun M2 dapat beroperasi secara maksimum selama 60 menit. Keuntungan bersih untuk memproduksi 1 kontainer K adalah $29 dan untuk 1 kontainer L adalah $45. Tentukan rencana produksi yang memaksimumkan keuntungan.

Penyelesaian:

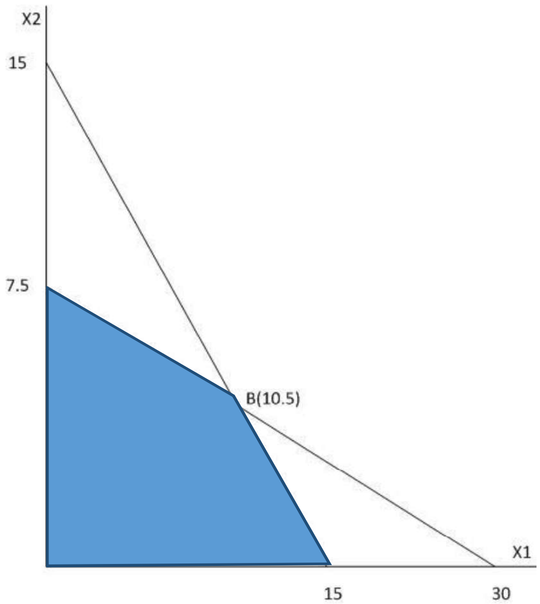
Max $\quad Z = 29K + 45L$

s.d.h $\quad 2K + 8L \leq 60$

$4K + 4L \leq 60$

$K, L \geq 0$

A. Metode grafis



Titik potong:

$4X_1 + 16X_2 = 120$

$4X_1 + \quad 4X_2 = \quad 60$

---------------------------- -

$12X_2 = \quad 60$

$X_2 = 5;\ X_1 = 10$

Paralel dengan garis Z di dapat titik B yang memberikan nilai optimum $f(10{,}5) = \$515$

$f(X_1, X_2) = 0 \rightarrow X_2 = \ -29/49\, X_1;$

$(-\,29/49)$ adalah gradien

B. Metode Simplex

<u>Operasi Awal I</u>

Cara sebarang penyelesaian layak dasar (PLD, *Basic Feasible Solution*) yang dibutuhkan untuk memulai iterasi. Tentukan peubah dasar (*basic variable*) dan peubah tak dasar (*nonbasic variable*).

Untuk contoh di atas:

Max: $\quad f = 29X_1 + 45X_2$

Kendala: $\quad 2X_1 + 8X_2 + X_3 \qquad = 60$

$4X_1 + 4X_2 \qquad X_4 = 60$

$X_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, 4)$

Ambil peubah awal sebagai <u>peubah tak dasar</u> dan set $X_1 = 0; X_2 = 0$ selesaikan untuk peubah dasarnya.

$X_3 = 60 - 2X_1 - 8X_2; \qquad X_1 = 0; X_2 = 0$

$X_4 = 60 - 4X_1 - 4X_2$

Didapat $X_3 = 60; X_4 = 60$ dan PLD awal adalah titik $O(0,0)$. Bila cara ini memberi nilai negative untuk beberapa peubah dasarnya, cari himpunan peubah dasar yang lain.

Langkah 1

Operasi O_1: Uji Optimalitas

$$f: 29\,X_1 + 45X_2$$

Untuk $X_1 = 0$ dan $X_2 = 0$ didapat $f = 0$ tidak optimal (X_1, X_2 positif)

Operasi O_2: Cari PLD yang lebih baik

Bila PLD yang baru diuji tidak optimal berpindahlah ke PLD didekatnya yang membuat nilai f menjadi lebih besar. Untuk menuju ke suatu PLD didekatnya berarti menuju ke suatu titik dimana $X_i = 0$. Untuk itu harus dibuat suatu penukaran peubah. Peubah X_i yang akan menjadi nol meninggalkan himpunan peubah dasar, dan satu peubah lainnya ($X_j;\ j \neq i$) menjadi peubah dasar.

Untuk contoh di atas, pertambahan pada X_1 ataupun X_2 akan menambah f, tetapi pertambahan terbesar pada f pada umumnya terjadi untuk peubah dengan *entry* yang paling positif. Pada kasus ini X_2 memiliki *entry* yang paling positif. Hal ini berarti nilai X_1 harus dibiarkan tetap nol, sedangkan X_2 harus ditambahkan semaksimal mungkin dengan mengingat pada kendala yang ada. Peubah yang harus diberi pertambahan dinamakan *entry variable*. Pada iterasi selanjutnya peubah ini akan menjadi peubah dasar.

Peubah dasar : $X_1; X_2$

Peubah tak dasar : $X_3; X_4$

$$f = 29(10) + 45(5) + 0(0) + 0(30)$$
$$= 515$$

Kendala : $X_1 = 10 + \frac{1}{6}X_3 - \frac{1}{3}X_4$

$$X_2 = 5 - \frac{1}{6}X_3 + \frac{1}{12}X_4$$

$$f = 515 - \frac{8}{3}X_3 - \frac{71}{12}X_4$$

Karena semua peubah tak dasar sudah negative, maka didapat penyelesaian optimal dengan f optimal = \$515; $X_1 = 10;\ X_2 = 5$

Tabel Simplex

Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	Hasil
Z	-29	-45	0	0	0
S_1	2	8	1	0	60
S_2	4	4	0	1	60
Z	-17,75	0	5,625	0	337,5
X_2	0.25	1	0,125	0	7,5
S_2	3	0	-1/2	1	30
Z	0	0	2,67	5,92	515
X_2	0	1	-0,16	-0,083	5
X_1	1	0	-2,16	0,333	10

C. Transisi dari Penyelesaian Grafik ke Penyelesaian Aljabar

Pada solusi grafik, ruang penyelesaian dapat digambarkan pada daerah yang menunjukkan kendala-kendala pada permasalahan tersebut.

Pada metode simplex, ruang penyelesaian ditunjukkan oleh m persamaan linear dan n peubah (variabel) non-negative.

Jika persamaan-persamaan yang terbentuk konsisten maka:

$m = n$: sistem persamaan ini akan memiliki 1 penyelesaian tunggal (*unique solution*)

$m < n$: sistem persamaan ini akan memiliki tak hingga banyak jawab

$m > n$: sekurang-kurangnya terdapat $m - n$ persamaan yang redundan (berulang/berlebihan)

<u>Titik Pojok (*Corner points*)</u>

Pada $m \times n$ persamaan ($m < n$) akan terdapat maksimum $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Contoh

$\max Z = 2X_1 + 3X_2$

$2X_1 + X_2 \leq 4$	$2X_1 + X_2 + S_1 = 4$
$X_1 + 2X_2 \leq 5$	$X_1 + 2X_2 + S_2 = 5$
$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

Pada contoh di atas $m = 2, n = 4$

Titik pojok dapat ditentukan dengan $n - m = 4 - 2$ peubah = 0, dan selesaikan sisanya $m = 2$.

Misalkan:

- $X_1 = 0, X_2 = 0;\ S_1 = 4, S_2 = 5$ -> kita mendapatkan *unique* (*basic*) *solution* (titik A).
- $S_1 = 0, S_2 = 0$

  $2X_1 + X_2 = 4$ didapat penyelesaian $X_1 = 1;\ X_2 = 2$ (titik C)

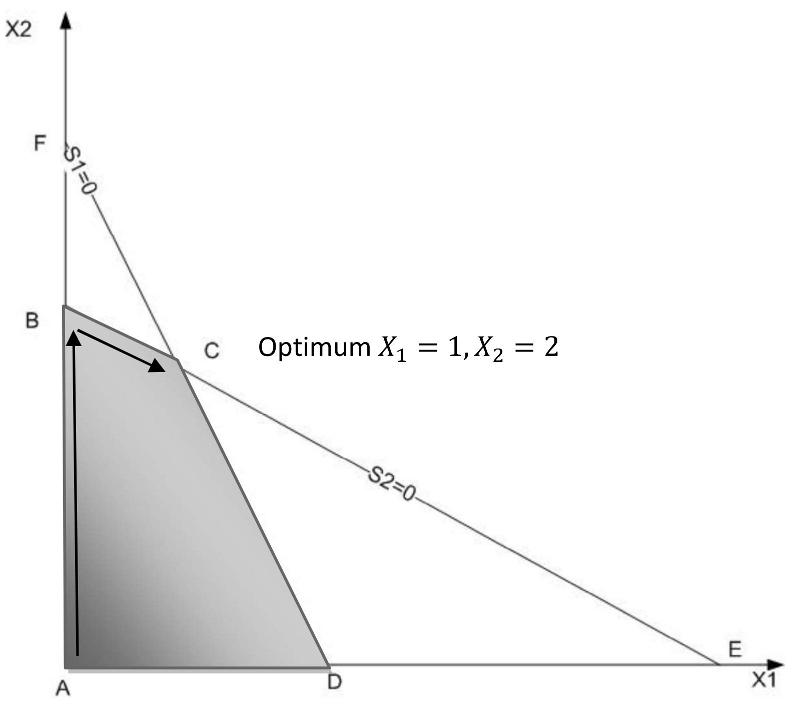
  $X_1 + 2X_2 = 5$

Maksimum akan ada $C_2^4 = \frac{4!}{2!(2)!} = 6$ titik

Nonbasic (Zero) variabel	*Basic variabel*	*Basic Solution*	*Corner Point*	*Feasible*	*Z*
(X_1, X_2)	(S_1, S_2)	$(4; 5)$	A	V	0
(X_1, S_1)	(X_1, S_2)	$(4; -3)$	F	X	-
(X_1, S_2)	(X_2, S_1)	$(2,5; 1,5)$	B	V	7,5
(X_2, S_2)	(X, S_1)	$(5; -6)$	E	X	-
(S_1, S_2)	(X_1, X_2)	$(1; 2)$	C	V	8

Terdapat *zero* $n - m$ variabel yang disebut sebagai *nonbasic variabel*

Sisanya m variabel disebut sebagai *basic variabel* dan penyelesaiannya disebut sebagai *basic solution*.



D. Simplex dengan Pendekatan Gauss Jordan

D.1 Iterative

$\max Z = 2X_1 + 3X_2$

Bila nilai X_1 dan atau X_2 bertambah, maka nilai Z juga akan bertambah.

Desain dari metode simplex adalah meningkatkan nilai satu variable satu per satu (*increasing one variable at a time*)

Tentu saja, variabel yang akan dinaikkan (ditingkatkan) nilainya adalah variabel dengan laju (*rate*) terbesar yang dapat meningkatkan nilai Z.

Pada contoh di atas *rate*$X_1 = 2$; *rate* dari $X_2 = 3$. Berarti variabel X_2 akan kita pilih hingga dia bergerak menuju titik B. Ternyata, nilai ini belum optimal, sehingga berikutnya kita meningkatkan nilai X_1 menuju titik C dan kita mencapai nilai optimum. Proses ini memerlukan iterasi.

Proses iterasi:

Titik pojok	Variabel *Basic*	Variabel *nonbasic* (*zero*)
A	S_1, S_2	X_1, X_2
B	X_2, S_1	X_1, S_2
C	X_1, X_2	S_1, S_2

Pada proses iterasi ini Basic variabel S_2 meninggalkan (*leaving*) posisinya sebagai variabel *basic* menjadi variabel *nonbasic*, sedangkan variabel X_2 masuk (*entering*) menjadi variabel *basic* dari semula adalah variabel *nonbasic*.

D2. Pendekatan Gauss Jordan

Perhatikan masalah pada contoh di bawah ini:

$\max Z = 5X_1 + 4X_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + 0\,S_3 + 0\,S_4$

$$
\begin{aligned}
6\,X_1 + 4\,X_2 + S_1 \quad & = 24 \\
X_1 + 2\,X_2 \quad + S_2 \quad & = 6 \\
-X_1 + \quad X_2 \quad\quad + S_3 \quad & = 1 \\
X_2 \quad\quad\quad + S_4 \quad & = 2
\end{aligned}
$$

$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$

Tabel simplex awal yang terbentuk adalah:

$Z - 5X_1 - 4X_2 = 0$

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Z	Solusi	
Z	-5	-4	0	0	0	0	1	0	Ratio
S_1	6	4	1	0	0	0	0	24	24/6=4
S_2	1	2	0	1	0	0	0	6	6/1 = 6
S_3	-1	1	0	0	1	0	0	1	1/-1=-1
S_4	0	1	0	0	0	1	0	2	2/0 =∞

Entering variabel ditentukan dengan memilih *rate* tertinggi, karena kita sudah mengubah fungsi tujuan dengan memindahkan ruas kanan dari fungsi tujuan ke kiri, maka pada kasus max, *entering* variabel ditentukan dengan melihat nilai terkecil (Tanda positive berubah menjadi negative saat kita memindahkan persamaan dari ruas kiri ke ruas kanan). Pada contoh ini maka X_1 akan berpindah dari *nonbasic* variable menjadi *basic* variabel (*entering* variabel). Selanjutnya vector kolom ini disebut sebagai kolom *pivot* (*pivot column*)

Leaving variabel ditentukan dengan mencari ratio non negative antara kolom solusi pada iterasi ke-i terhadap kolom *entering variabel* yang memiliki nilai paling minimum. Pada contoh di atas maka S_1 akan menjadi variabel basic yang berubah menjadi *non-basic* (*leaving* variabel). Selanjutnya vector baris ini disebut sebagai baris *pivot* (*pivot row*)

Perhitungan Gauss-Jordan

1. Basic Pivot
   a. Gantikan *leaving* variabel pada kolom *basic* dengan *entering* variabel (pada contoh di atas: $S_1 \rightarrow X_1$)
   b. Nilai pivot yang baru = $\frac{\text{Nilai pivot baris saat ini}}{elemen\ pivot}$
2. Seluruh baris yang lain, termasuk Z akan memiliki nilai sebagai berikut:
   Baris baru = (Nilai baris saat ini) – (nilai coefisien pivot yang bersesuaian) x (Nilai pivot baru)

Pada contoh tabel di atas:

1. Gantikan S_1 pada kolom *basic* dengan X_1

   Nilai baris X_1 baru = Nilai baris S_1 dibagi dengan 6

   = 1/6 (0 6 4 1 0 0 0 24)

   = (0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

2. Nilai Z-baris baru = nilai Z saat ini – (-5) x nilai baris X_1 baru

   = (1 -5 -4 0 0 0 0 0) – (-5) x (0 1 2/3 1/6 0 0 0 4)

   = (1 0 -2/3 5/6 0 0 0 20)

dan seterusnya hingga didapat tabel simplex baru (iterasi 1)

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Z	Solusi
Z	0	-2/3	5/6	0	0	0	1	20
X_1	1	2/3	1/6	0	0	0	0	4
S_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	0	2
S_3	0	5/3	1/6	0	1	0	0	5
S_4	0	1	0	0	0	1	0	2

(Iterasi 2)

Basic	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Z	Solusi
Z	0	0	3/4	1/2	0	0	1	21
X_1	1	0	1/4	-1/2	0	0	0	3
X_2	0	1	-1/8	3/4	0	0	0	3/2
S_3	0	0	3/8	-5/4	1	0	0	5/2
S_4	0	0	1/8	-3/4	0	1	0	1/2

Semua nilai rate pada baris basic sudah non-negative, maka kita mencapai solusi optimum, dengan nilai $X_1 = 3, X_2 = 3/2$ dan nilai optimum $Z = 21$.

4.3. Penyelesaian Awal Semu (*Artificial Starting Solution*)

Bila kendala awal dari suatu persamaan bertipe ≥ maka penyelesaian layak awal belum ada.

Ilustrasi: Max $Z = 2X_1 + X_2$

Kendala $X_1 - \frac{1}{2}X_2 \geq 1$

$X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 + X_2 \leq 4$

Penyelesaian:

Bawa pertidaksamaan di atas ke dalam bentuk normal/baku dengan menambahkan peubah *slack*:

$$X_1 - \tfrac{1}{2}X_2 - X_3 = 1$$

$$X_1 - X_2 + X_4 = 2$$

$$X_1 + X_2 + X_5 = 4$$

$$X_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, 5)$$

Jika X_3, X_4, X_5 adalah peubah dasar maka:

$$X_3 = -1 - X_1 + \tfrac{1}{2}X_2$$

$$X_4 = 2 - X_1 + X_2$$

$$X_5 = 4 - X_1 - X_2$$

Perhatian untuk $X_1 = 0$; $X_2 = 0$ didapat $X_3 = -1$, hal ini menyalahi definisi bahwa $X_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$; karena itu ditambahkan suatu peubah baru X_6 yang disebut sebagai peubah buatan (*artificial variable*) dan didefinisikan:

$$X_3 = -1 - X_1 + \tfrac{1}{2}X_2 + X_6$$

dengan $X_6 \geq 0$ dan buat X_4, X_5, X_6 sebagai peubah dasar, sehingga diperoleh:

$$X_4 = 2 - X_1 + X_2$$

$$X_5 = 4 - X_1 - X_2$$

$$X_6 = 1 - X_1 + \tfrac{1}{2}X_2 + X_3$$

Jika $X_1 = 0$; $X_2 = 0$; $X_3 = 0$ didapat $X_4 = 2$; $X_5 = 4$ dan $X_6 = 1$ sebagai penyelesaian PLD dari masalah yang diperluas dengan 6 peubah dan 3 persamaan. Peubah buatan (*artificial variable*) tidak memiliki arti fisik dari masalah awal, karena itu cara ini dapat dianggap sah jika dan hanya jika peubah tersebut dibuat sama dengan nol pada saat nilai optimum telah diperoleh.

Dengan kata lain: peubah buatan hanya digunakan pada awal penyelesaian masalah saja dan harus dibuat menjadi nol pada akhir penyelesaian masalah, jika tidak demikian maka solusi yang didapatk akan menjadi tidak layak (*infeasible*).

Untuk membuat peubah buatan menjadi nol pada akhir penyelesaian maka secara nalar peubah buatan tersebut harus diberi nilai hukuman (*penalty*) pada fungsi tujuannya.
Ada 2 metode yang didasarkan pada ide penggunaan nilai hukuman ini yaitu: Metode M besar (*big M Methods*) dan Metode dua fase (*two phase methods*).

4.3.1 Metode M Besar (*Big M Method*)

Contoh soal:

Min $Z = 4X_1 + X_2$

Kendala
$$3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Bentuk baku:

Min $Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

Kendala
$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - X_3 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Lihat:
$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2$$
$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + X_3$$

Maka
$$Z = 4X_1 + X_2 + M(3 - 3X_1 - X_2) + M(6 - 4X_1 - 3X_2 + X_3)$$
$$= (4 - 7M)X_1 + (1 - 4M)X_2 + MX_3 + 9M$$

R_1, R_2 adalah peubah buatan

M adalah bilangan positif yang sangat besar

Selesaikan dengan tabel simplex. Nilai optimum didapat bila semua peubah tak dasar memiliki nilai koefisien Z non positif.

Tabel Simplex

Basis	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solusi
Z	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	$9M$
R_1	3	1	9	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
X_4	1	2	0	0	0	1	4
Z	0	$(1+5M)/3$	$-M$	$(4-7M)/3$	0	0	$4+2M$
X_1	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R_2	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
X_4	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3
Z	0	0	$1/5$	$8/5-M$	$-1/5-M$	0	$18/5$
X_1	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
X_2	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
X_4	0	0	1	1	-1	1	1
Z	0	0	0	$7/5-M$	$-M$	$-1/5$	$17/5$
X_1	1	0	0	$2/5$	0	$-1/5$	$2/5$
X_2	0	1	0	$-1/5$	0	$3/5$	$9/5$
X_3	0	0	1	1	-1	1	1

Ingat!

Dalam tabel $Z-(4-7M)X_1-(1-4M)X_2-MX_3=9M$

4.3.2 Metode Dua Fase (Two Phase Method)

Kekurangan dari metode M besar adalah adanya kemungkinan terjadi pembulatan galat ke atas (*round off error*) karena penggunaan konstanta M sebagai nilai yang sangat besar. Akibat dari pembulatan galat ke atas ini adalah koefisien dari X_1 dan X_2 pada fungsi tujuan dianggap bernilai nol. Untuk mengatasi kesulitan ini maka digunakan metode dua fase, yaitu dengan menghilangkan penggunaan konstanta M.

Fase 1:

- Tambahkan peubah buatan pada penyelesaian awal
- Bentuk fungsi tujuan baru untuk mendapatkan jumlahan minimum dari peubah buatan dengan kendala seperti pada masalah awal
- Jika nilai minimum dari fungsi tujuan = nol, maka masalah ini memiliki ruang penyelesaian yang layak, lanjutkan ke fase kedua
- Jika nilai minimum dari fungsi tujuan adalah positif masalah ini tidak memiliki penyelesaian layak. STOP

Fase 2:

Gunakan penyelesaian dasar optimum dari fase 1 sebagai penyelesaian awal (*starting solution*) dari masalah yang sebenarnya.

Catatan: Jumlah iterasi pada metode M besar sama dengan jumlah iterasi pada metode dua fase.

Ilustrasi: Dari soal dengan metode M besar di atas:

Fase 1:

Min: $r = R_1 + R_2$

Kendala:

$$
\begin{aligned}
3X_1 + X_2 \quad + R_1 &= 3 \\
4X_1 + 3X_2 - X_3 \quad + R_2 &= 6 \\
X_1 + 2X_2 \quad + X_4 &= 4
\end{aligned}
$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, R_1, R_2 \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
r &= R_1 + R_2 \\
&= (3 - 3X_1 - X_2) + (6 - 4X_1 - 3X_2 + X_3) \\
&= -7X_1 - 4X_2 + X_3 + 9
\end{aligned}
$$

Tabel awal

Basis	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solusi
r	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
X_4	1	2	0	0	0	1	4
r	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2
X_1	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R_2	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2
X_4	0	5/3	0	-1/3	0	1	3
r	0	0	0	-1	-1	0	0*
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
X_4	0	0	1	1	-1	1	1

Karena minimum $r = 0$ maka penyelesaian layak (*feasible*) ada

Fase 2: Dari tabel optimum Fase 1 didapat bentuk baku sebagai berikut:

Min: $Z = 4X_1 + X_2$

Kendala:
$$X_1 + \quad 1/5X_3 \quad = 3/5$$
$$X_2 - 3/5X_3 \quad = 6/5$$
$$X_3 + X_4 = 1$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Maka:

$$\begin{aligned} Z &= 4X_1 + X_2 \\ &= 4(3/5 - 1/5X_3) + (3/5 + 6/5\,X_3) \\ &= -1/5\,X_3 + 18/5 \end{aligned}$$

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	Solusi
Z	0	0	1/5	0	18/5
X_1	1	0	1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	0	6/5
X_4	0	0	1	1	1
Z	0	0	0	-1/5	17/5
X_1	1	0	0	-1/5	2/5
X_2	0	1	0	3/5	9/5
X_3	0	0	1	1	1

4.4. Kasus-kasus Khusus pada Aplikasi Metode Simplex

4.4.1. Kemerosotan (Degenerasi)

Kemerosotan terjadi jika satu atau lebih peubah dasar sama dengan nol pada iterasi berikutnya. Hal ini terjadi karena model sekurang-kurangnya mengandung satu kendala yang tidak terpakai (*redundan*)

Ilustrasi:

Max $Z = 3X_1 + 9X_2$ $\qquad Z = 3X_1 + 9X_2$

Kendala $X_1 + 4X_2 \leq 8$ $\qquad X_1 + 4X_2 + X_3 \quad = 8$

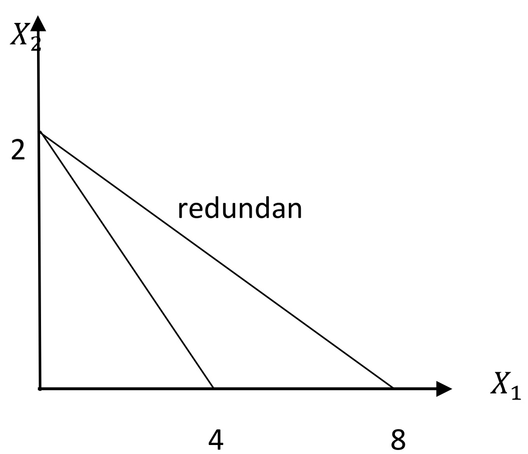
$X_1 + 2X_2 \leq 4$ $\qquad X_1 + 2X_2 \quad + X_4 = 4$

$X_1, X_2 \geq 0$ $\qquad X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Tabel Simplex

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	Solusi
Z	-3	-9	0	0	0
X_3	1	4	1	0	8
X_4	1	2	0	1	4
Z	-3/4	0	9/4	0	18
X_2	1/4	1	1/4	0	2
X_4	1/2	0	-1/2	1	0*
Z	0	0	3/2	3/2	18
X_2	0	1	1/2	-1/2	2
X_1	1	0	-1	2	0

Grafik



Akibat dari kemerosotan adalah

<u>Terjadi perputaran (*cycling*)</u>

Prosedur simplex akan mengulang barisan (*sequence*) yang sama pada iterasinya, nilai fungsi tujuan ($= Z$) tidak pernah berubah dan perhitungan tak pernah berhenti.

<u>Memiliki hasil penyelesaian sama</u>

Walaupun dalam pengelompokan peubah dasar dan non dasar berbeda tetapi akan memiliki hasil yang sama

Contoh: $X_2 = 2;$ $X_2 = 2$

$X_4 = 0;$ $X_1 = 0$

$Z = 18;$ $Z = 18$

4.4.2. Optimal Ganda (*Alternative Optima*)

Bila fungsi tujuan sejajar dengan kendala yang terikat (*binding*) maka fungsi tujuan akan memiliki nilai optimal yang lebih dari satu titik. Hal inilah yang disebut sebagai optimal ganda.

Ilustrasi (dengan 2 peubah keputusan)

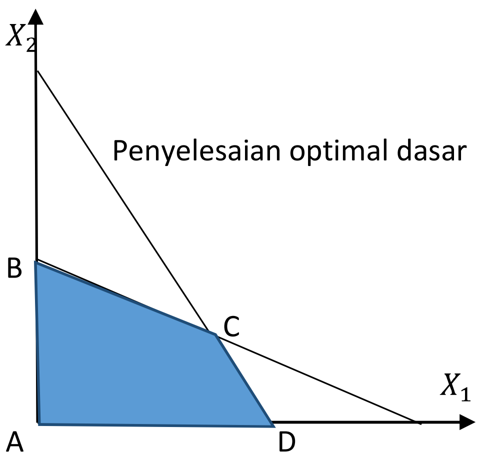
Max: $Z = 2X_1 + 4X_2$

Kendala: $X_1 + 2X_2 \leq 5$

$X_1 + \quad X_2 \leq 4$

$X_1, X_2 \geq 0$

Grafik:



Tabel simplex:

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	Solusi
Z	-2	-4	0	0	0
X_3	1	2	1	0	5
X_4	1	1	0	1	4
Z	0*	0	2	0	10
X_2	1/2	1	1/2	0	5/2
X_4	1/2	0	-1/2	1	3/2
Z	0	0	2	0*	10
X_2	0	1	1	-1	1
X_1	1	0	-1	2	3

Terlihat koefisien (tak dasar) $X_1 = 0$, hal ini menunjukkan bahwa X_1 dapat menjadi penyelesaian dasar tanpa mengubah nilai Z, tetapi mengubah nilai dari peubah-peubah yang ada. Secara matematik dapat ditentukan seluruh titik (X_1, X_2) pada segmen garis BC di atas sebagai rata-rata berbobot non negatif pada titik B dan C dengan $0 \le \alpha \le 1$ dan:

B:$X_1 = 0$; $\quad X_2 = 5/2$

C:$X_1 = 3$; $\quad X_2 = 1$

Di dapat:

$$X_1 = \alpha(0) \quad + (1-\alpha)(3) = 3 - 3\alpha$$
$$X_2 = \alpha(5/2) + (1-\alpha)(1) = 1 + 3\alpha/2$$

untuk $0 \le \alpha \le 1$ maka (X_1, X_2) terletak pada BC.

Ilustrasi (dengan 3 peubah keputusan)

Dapatkan penyelesaian optimal ganda dasar dari:

Max $\quad Z = X_1 + 2X_2 + 3X_3$

Kendala $\quad X_1 + 2X_2 + 3X_3 \le 10$

$X_1 + X_2 \le 5$

$X_1 \le 1$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

Bentuk baku $\quad X_1 + 2X_2 + 3X_3 + S_1 = 10$

$X_1 + X_2 + S_2 = 5$

$X_1 + S_3 = 1$

Tabel Simplex:

Basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solusi
Z	-1	-2	-3	0	0	0	0
S_1	1	2	3	1	0	0	10
S_2	1	1	0	0	1	0	5
S_3	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	3	0	0	10
X_3	1/3	2/3	1	1/3	0	0	10/3
S_2	1	1	0	0	1	0	5
S_3	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	3	0	0	10
X_3	0	2/3	1	1/3	0	-1/3	3
S_2	0	1	0	0	1	-1	5
X_1	1	0	0	0	0	1	1

Dari iterasi: I didapat $X_1 = 0;\ X_2 = 0; X_3 = 10/3$

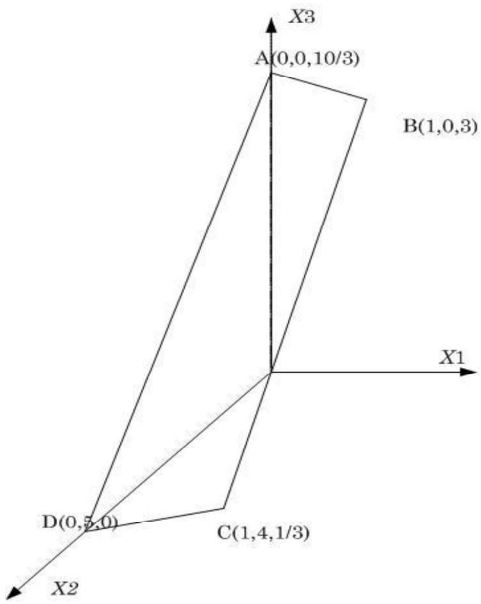
II didapat $X_1 = 1;\ X_2 = 0; X_3 = 3$

Jika dari iterasi I dipilih alternatif lain maka didapat tabel simplex sebagai berikut:

Basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solusi
Z	0	0	0	3	0	0	10
X_3	1/3	2/3	1	1/3	0	0	10/3
S_2	1	1	0	0	1	0	5
S_3	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	3	0	0	10
X_3	-1/3	0	1	1/3	-2/3	0	0
X_2	1	1	0	0	1	0	5
S_3	1	0	0	0	0	1	1
Z	0	0	0	3	0	0	10
X_3	0	0	1	1/3	-2/3	1/3	1/3
X_2	0	1	0	0	1	-1	4
X_1	1	0	0	0	0	1	1

Dari iterasi: III didapat $X_1 = 0;\ X_2 = 5; X_3 = 0$

Iv didapat $X_1 = 1;\ X_2 = 4; X_3 = 1/3$



Penyelesaian optimal berada di bidang ABCD.

Penyelesaian secara matematis:

$$X_1 = \lambda_2 + \lambda_4$$

$$X_2 = 5\lambda_3 + 4\lambda_4$$

$$X_3 = \frac{10}{3}\lambda_1 + 3\lambda_2 + 1/3\lambda_4$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

Misalkan diambil $\lambda_1 = 0{,}25; \lambda_2 = 0{,}25; \lambda_3 = 0{,}25;$ $\lambda_4 = 0{,}25$ akan didapat titik (0,75; 2,25; 1,67) yang berada pada bidang ABCD dan juga merupakan penyelesaian optimal yaitu

$$\begin{aligned} Z &= X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\ &= (0{,}75) + 2(2{,}25) + 3(1{,}67) \\ &= 10 \end{aligned}$$

4.4.3. Penyelesaian tak terbatas (*Unbounded Solution*)

Dalam model program linear, nilai-nilai dari suatu peubah dapat bertambah secara tak terbatas (*indefinite*) tanpa melanggar kendala-kendalanya. Hal ini berarti ruang penyelesaiannya tak terbatas sekurang-kurangnya dalam 1 arah (*direction*). Akibatnya nilai fungsi tujuannya mungkin bertambah atau berkurang secara tak terbatas pula.

Ilustrasi:

Max	$Z = 20X_1 + 10X_2 + X_3$	Bentuk baku:
Kendala	$3X_1 - 3X_2 + 5X_3 \leq 50$	$3X_1 - 3X_2 + 5X_3 + S_1 = 50$
	$X_1 + X_3 \leq 10$	$X_1 + X_3 + S_2 = 10$
	$X_1 - X_2 + 4X_3 \leq 20$	$X_1 - X_2 + 4X_3 + S_3 = 20$
	$X_1, X_2, X_3 \geq 0$	

Tabel simplex

Basis	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Solusi
Z	-20	-10	-1	0	0	0	0
S_1	3	-3	5	1	0	0	50
S_2	1	0	1	0	1	0	10
S_3	1	-1	4	0	0	1	20
Z	0	-10	19	0	20	0	200
S_1	0	-3	2	1	-3	0	20
X_1	1	0	1	0	1	0	10
S_3	0	-1	3	0	-1	1	10

Unbounded

Ketentuan tak terbatas (*unbounded*)

- Jika pada suatu iterasi pada tabel simplex koefisien kendala dari peubah tak dasar adalah non positif maka ruang penyelesaiannya tak terbatas pada arah (*direction*) dari peubah tersebut.
- Jika koefisien fungsi tujuan dari peubah tersebut negatif (untuk masalah memaksimumkan) atau positif (untuk meminimumkan), maka nilai fungsi tujuannya juga tak terbatas.

Pada ilustrasi di atas ruang penyelesaiannya tak terbatas pada arah X_2 dan nilai Z optimum tak terbatas karena X_2.

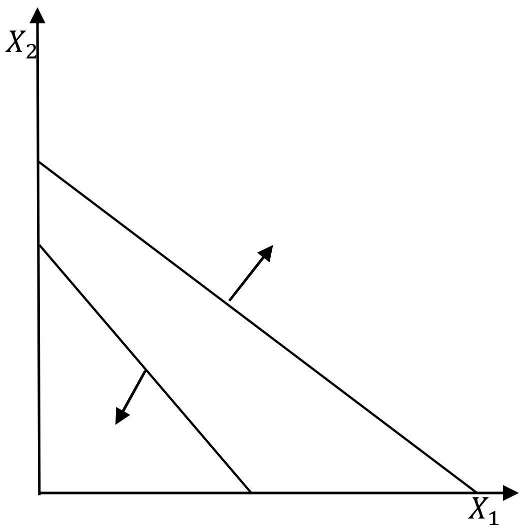
4.4.4 Penyelesaian Tak Layak (*Infeasible Solution*)

Jika kendala-kenadala pada suatu model tidak terpenuhi secara bersamaan (simultan) maka model dikatakan memiliki penyelesaian tak layak.

Ilustrasi:

Max	$Z = 3X_1 + 3X_2$	Max	$Z = 3X_1 + 3X_2 + MR$
Kendala	$2X_1 + X_2 \leq 2$		$2X_1 + X_2 + X_3 \qquad\qquad = 2$
	$3X_1 + 4X_2 \geq 12$		$3X_1 + 4X_2 \qquad - X_4 + R = 12$
	$X_1, X_2 \geq 0$		

Grafik



$$Z = 3X_1 + 3X_2 + MR$$
$$= 3X_1 + 3X_2 + M(12 - 3X_1 - 4X_2 + X_4)$$
$$= (3 - 3M)X_1 + (3 - 4M)X_2 + MX_4 - 12M$$

Metode M Besar

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	R	Solusi
Z	$-3+3M$	$-2+4M$	0	$-M$	0	$12M$
X_3	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12
Z	$1-5M$	0	$2-4M$	$-M$	0	$4+4M$
X_2	2	1	1	0	0	2
R	-=5	0	-4	-1	1	4

Pada saat optimal peubah buatan R positif (=4) ini merupakan petunjuk bahwa ruang penyelesaian tak layak.

Metode dua fase $r = 12 + X_4 - 3X_1 - 4X_2$

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	R	Solusi
r	3	4	0	-1	0	12
X_3	2	1	1	0	0	2
R	3	4	0	-1	1	12
r	-5	0	-4	-1	0	4
X_2	2	1	1	0	0	2
R	-5	0	-4	-1	1	4

Pada saat optimal solusi $r = 4$ ini merupakan petunjuk bahwa ruang penyelesaian tidak layak.

4.5 Interpretasi Tabel Simplex dan Analisa Kepekaan

Dari contoh model pabrik cat:

Max $Z = 3X_1 + 2X_2$ (Keuntungan)

Kendala

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 6 \text{ (bahan A)}$$

$$2X_1 + X_2 + S_2 = 8 \text{ (bahan B)}$$

$$-X_1 + X_2 + S_3 = 1 \text{ (Permintaan)}$$

$$X_2 + S_4 = 2 \text{ (Permintaan)}$$

Tabel Optimum

Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solusi
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	12 2/3
X_2	1	0	2/3	-1/3	0	0	1 1/3
X_1	0	1	-1/3	2/3	0	0	3 1/3
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

4.5.1 Solusi Optimum

Peubah yang tidak ada pada kolom "Basis" memiliki nilai nol

Peubah keputusan	Nilai optimum	Keputusan
X_1	3 1/3	Produksi cat kayu 3 1/3 ton/hari
X_2	1 1/3	Produksi cat tembok 3 1/3 ton/hari
Z	12 2/3	Menghasilkan keuntungan 12 2/3 ribu dollar

4.5.2 Status sumber (*resource*)

Bila peubah *slack* memiliki nilai positif berarti sumber daya tersebut tidak digunakan seluruhnya, jadi berlebihan tetapi bila peubah *slack* tersebut sama dengan nol berarti seluruh sumber yang ada digunakan. Dari contoh di atas

Sumber	*Slack*	Status
Bahan A	$S_1 = 0$	Jarang (*scarce*)
Bahan B	$S_2 = 0$	Jarang
Batas kelebihan cat kayu terhadap cat tembok	$S_3 = 3$	berlebihan (*abundant*)
Batas permintaan terhadap cat tembok	$S_4 = 2/3$	berlebihan

4.5.3 Nilai pertambahan per unit (*unit worth*) dari suatu *resource*

Unit worth adalah rata-rata perubahan nilai optimum Z sebagai akibat bertambahan jumlah *resource* yang tersedia. Dari contoh di atas

Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solusi
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	12 2/3

$Y_1 = 1/3$ ribu dollar/unit untuk bahan A

$Y_2 = 4/3$ ribu dollar/unit untuk bahan B

$Y_3 = 0$; $Y_4 = 0$

4.5.4 Perubahan maksimum pada persediaan *resource*

Unit worth biasanya digunakan untuk menentukan sumber yang akan ditingkatkan, selain itu juga untuk menentukan jangkauan dari variari *resource*. Hal ini dapat dilihat dari *unit worth* yang terdapat pada tabel optimum.

Contoh:

Andaikan Δ_1 merupakan banyaknya perubahan pada *resource* ke-1

	Elemen suku kanan pada iterasi ke-		
Persamaan	0	1	2
	(awal)		(optimum)
Z	0	12	12 2/3 + 1/3 Δ_1
1	6+Δ_1	2 +Δ_1	4/3 + 2/3 Δ_1
2	8	4	10/3 - 1/3 Δ_1
3	1	5	3 - Δ_1
4	2	2	2/3 – 2/3Δ_1

Pada kondisi optimum

(1) X_2 = 4/3 + 2/3 $\Delta_1 \geq 0$ → $\Delta_1 \geq -2$

(2) X_1 =10/3 – 1/3 $\Delta_1 \geq 0$ → $\Delta_1 \leq 10$ jadi $-2 \leq \Delta_1 \leq 1$

(3) S_3 = 3 – $\Delta_1 \geq 0$ → $\Delta_1 \leq 3$

(4) S_4 = 2/3 – 2/3 $\Delta_1 \geq 0$ → $\Delta_1 \leq 1$

Andaikan Δ_2 merupakan banyaknya perubahan pada sumber 2

(1) X_2 = 4/3 - 1/3 $\Delta_2 \geq 0$ → $\Delta_2 \leq 4$

(2) X_1 =10/3 + 2/3 $\Delta_2 \geq 0$ → $\Delta_2 \geq -5$ jadi $-2 \leq \Delta_2 \leq 4$

(3) S_3 = 3 + $\Delta_2 \geq 0$ → $\Delta_2 \geq -3$

(4) S_4 = 2/3 + 1/3 $\Delta_2 \geq 0$ → $\Delta_2 \geq -2$

4.5.5 Perubahan maksimum pada keuntungan/biaya marginal

Koefisien pada fungsi tujuan dapat berubah dalam jangkauan (*range*) yang dimungkinkan tanpa mengakibatkan nilai optimum dari suatu peubah berubah. Dalam metode simplex pada tiap iterasi persamaan fungsi tujuan tidak pernah digunakan sebagai pivot sehingga perubahan pada koefisien fungsi tujuan hanya akan berakibat pada persamaan fungsi tujuan pada tabel optimum saja.

Contoh:

Perubahan pada koefisien X_1 pada fungsii tujuan adalah $C_1 = 3 + \delta_1$ maka $Z = (3 + \delta_1)X_1 + 2X_2$

Dari tabel:

Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solusi
Z	0	0	1/3 -1/3 δ_1	4/3 + 2/3 δ_1	0	0	12 2/3 +10/3 δ_1

Perhitungan:

1/3 -1/3 $\delta_1 \geq 0$ → $\delta_1 \leq 1$ jadi $-2 \leq \delta_1 \leq 1$

4/3 + 2/3 $\delta_1 \geq 0$ → $\delta_1 \geq -2$ $1 \leq C_1 \leq 4$

Perubahan pada koefisien X_2 pada fungsi tujuan adalah $C_2 = X_2 + \delta_2$ maka

$Z = 3X_1 + (2 + \delta_2)X_2$

Perhitungan

1/3 + 2/3 $\delta_2 \geq 0$ → $\delta_2 \geq -1/2$ jadi $-1/2 \leq \delta_2 \leq 4$

4/3 - 1/3 $\delta_2 \geq 0$ → $\delta_2 \leq 4$ $3/2 \leq C_2 \leq 6$

Catatan:

Hal ini hanya berlaku pada peubah dasar pada kondisi optimum.

Contoh kasus:

Suatu perusahaan menghasilkan dua jenis produk yaitu P_1 dan P_2 masing-masing memerlukan 2 macam bahan baku A dan B. Harga jual pada tiap satuan P_1 adalah P_2 adalah 100$. Bahan baku A yang tersedia 600 satuan dan B sebanyak 1000 satuan. Satu satuan P_1 memerlukan satu satuan A dan dua satuan B sedangkan P_2 memerlukan satu satuan A dan satu satuan B. Tentukan penyelesaian optimum dan lakukan analisa kepekaan.

Jawab:

Model matematika: $Z = 150X_1 + 100X_2$

Kendala $X_1 + X_2 \leq 600$ $X_1 + X_2 + X_3 = 600$

$2X_1 + X_2 \leq 1000$ $2X_1 + X_2 + X_4 = 1000$

$X_1, X_2 \geq 0$

Bla..bla..bla… didapat table optimum sebagai berikut:

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	Solusi
Z	0	0	50	50	80000
X_2	0	1	2	-1	200
X_1	1	0	-1	1	400

Kondisi optimum

$Z_{opt} = 80000\$; X_1 = 400; X_2 = 200.$

Resource 1 dan *resource* 2 jarang (*scarce*)

Unit worth: $Y_1 = 50;\ Y_2 = 50$

Artinya:

- Jika X_3 dinaikkan dari 0 menjadi 1 maka: Z akan turun sebesar 50$; A dari 600 turun menjadi 599 satuan, Z_{opt} dari 80000$ akan turun menjadi 79.950$
- Unsur-unsur pada kolom X_3 menerangkan:

  $X_2 + 2X_3 = 200$

  $X_1 - X_3 = 400$

  Jika X_3 naik 1 satuan (jatah A turun satu satuan) maka:

  X_1 naik satu satuan dari 400 menjadi 401

  X_2 turun dua satuan dari 200 menjadi 198

  $Z = 150(401) + 100(198) = 79.950\$$

  Jika X_3 turun 1 satuan (jatah A naik satu satuan) maka:

  X_1 turun satu satuan dari 400 menjadi 399

  X_2 naik dua satuan dari 200 menjadi 202

  $Z = 150(399) + 100(202) = 80.050\$$

Jika manajer perusahaan tersebut ingin menambah bahan baku A maka dia harus menghitung biaya penambahan <u>tidak boleh lebih</u> dari *unit worth*. Jika melebihi maka perluasan produksi <u>tidak ada artinya</u>. (berlaku juga untuk B)

Rencana produksi baru

Perusahaan ingin menambahkan 1 produk baru P_n yang memerlukan 3 satuan A dan 2 satuan B. Harga/satuan adalah 220$. Maka rumusan masalah ini berubah menjadi:

Max $\quad Z = 150X_1 + 100X_2 + 220X_n$

Kendala $\quad X_1 + X_2 + X_3 \quad + 3X_n = 600$

$2X_1 + X_2 + \quad + X_4 + 2X_n = 1000$

$X_1, \dots, X_4, X_n \geq 0$

Bla…bla..bla… didapat table optimum sebagai berikut:

Basis	X_1	X_2	X_n	X_3	X_4	Solusi
Z	0	0	30	50	50	80000
X_2	0	1	4	2	-1	200
X_1	1	0	-1	-1	1	400

Jawab optimum: $X_1 = 400; X_2 = 200$ dengan laba optimum $Z_{opt} = 80000\$$

Kesimpulan: Tak perlu memasarkan produk baru P_n karena tidak memberi keuntungan.

Telah diketahui bahwa *unit worth* dari A = 50$/unit dan B = $50/unit. Artinya dengan rencana produk campuran yang sekarang, tiap kekurangan 1 satuan A atau B akan menurunkan Z sebesar 50$, sedangkan P_n perlu 3 satuan A dan 2 satuan B, karena itu 1 satuan P_n akan menurunkan Z sebesar (3 x 50$) + (2 x 50$) = 250$. Jika P_n dijual > 250$ keuntungan akan bertambah, sedangkan pada kasus ini P_n hanya dijual sebesar 220$ per satuan, sehingga tiap 1 produk P_n akan rugai sebesar 250$ - 220$ = 30$.

Latihan

1. Toko B&K menjual tiga tipe soft drink, merk Cola A1 dan Cola A2, dan Cola yang diberi merk sendiri dengan harga lebih murah yaitu Cola BK. Harga A1, A2 dan BK per kaleng adalah 80,70 dan 60 (dalam ratusan Rp). Secara rata-rata, toko tak dapat menjual lebih dari 500 kaleng untuk semua jenis cola/hari. Walaupun Cola A1 adalah Cola terkenal, namun pelanggan cenderung membeli Cola A2 dan BK karena lebih murah. Diestimasikan bahwa sekurang-kurangnya 100 kaleng A1 dapat terjual/hari. Penjualan A2 dan BK secara keseluruhan melebihi penjual A1 dengan margin sekurang-kurangnya 4:2.
   a. Selesaikan persoalan di atas
   b. Harga Cola BK dapat dinaikkan hingga berapa besar?
   c. Agar bisa berkompetisi dengan toko sebelah, B&K berencana untuk mereduksi harga ketiga tipe Cola ini sebesar Rp 500/kaleng. Apakah perubahan harga ini mengubah penyelesaian optimum?

2. Perusahaan pengalengan dikontrak untuk menerima 60.000Kg tomat matang/hari dengan harga 700 per Kg, dari tomat ini perusahaan menggunakanya untuk memproduksi juice tomat, saos tomat dan tomat pasta. Produk-produk yang sudah dikalengkan ini dikemas dalam kardus berisi 24 kaleng/kardus. 1 kaleng juice tomat membutuhkan 1Kg tomat segar, 1 kaleng saus tomat membutuhkan 0.5Kg tomat segar, dan 1 kaleng tomat pasta membutuhkan ¾ tomat segar. Market share limit /hari untuk ketiga jenis produk ini adalah 2000 kardus juice, 5000 kardus saus, dan 6000 kardus pasta. Harga per kardus untuk ketiga produk adalah 210, 90, 120 (Rp ribuan) untuk juice, saus dan pasta secara berturutan.
    a. Tentukan solusi optimum dari masalah di atas
    b. Lakukan analisa sensitivitas setelah anda mendapatkan hasil optimumnya.

3. Electra memproduksi 4 tipe motor, masing-masing dirakit pada assembly line yang terpisah. Kapasitas dari line tersebut adalah 500, 500, 800 dan 750 motor per hari. Motor tipre I membutuhkan 8 unit komponen elektronik tertentu, motor tipe 2 menggunakan 5 unit, motor tipe 3 menggunakan 4 unit dan motor tipe 4 menggunakan 6 unit. Supplier komponen tersebut dapat menyediakan 8000 unit/hari. Harga motor per unit adalah 60, 40, 25, dan 30 (Rp juta).
    a. Tentukan solusi optimal
    b. Lakukan sensitivitas analysisnya.

Bab 5

Dualitas dan Analisa Kepekaan

5.1 Definisi dari Masalah Dual

Dual merupakan perluasan dari masalah program linear dapat didefinisikan secara langsung dan sistematik dari model mula-mula atau primal dari model program linear.

Syarat mengubah primal menjadi dual adalah:

Model harus berada dalam bentuk baku

Bentuk baku dari primal adalah:

Max atau Min $\quad Z = \sum_j C_j X_j$

Kendala $\quad \sum_j \alpha_{ij} X_j = b_j; i = 1,2, \dots, m$

$\quad X_j \geq 0; j = 1,2, \dots, n$

Aturan-aturan untuk mengubah primal menjadi dual

1. Untuk setiap kendala pada primal akan menjadi peubah pada dual
2. Untuk setiap peubah pada primal akan menjadi kendala pada dual
3. Koefisien kendala dari peubah primal membentuk koefisien ruas kiri dari kendala dual yang bersesuaian dan koefisien fungsi tujuan dari peubah yang sama menjadi ruas kanan dari kendala dual.

Peubah primal

	X_1	X_2	…	X_j	…	X_n		
Ruas kanan kendala dual	C_1	C_2	…	C_j	…	C_n		
	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	b_1	$\leftarrow Y_1$
Koefisien ruas kiri kendala dual	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	b_2	$\leftarrow Y_2$
	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	b_m	$\leftarrow Y_m$
	Kendala dual ke-j							dual tujuan

Tujuan Primal Baku	Dual		
	Tujuan(*Objective*)	Kendala	Peubah
Maksimum	Minimum	>=	Tak terbatas
Minimum	Maksimum	<=	Tak terbatas

Catatan:

Semua kendala pada primal merupakan persamaan dengan ruas kanan non negative dan seluruh peubahnya non negatif juga.

5.2. Relasi Primal –Dual

5.2.1 Penyelesaian optimal dual pada table simplex

Primal

Max $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$

Kendala $X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10$

$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 8$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Dual

Min $W = 10Y_1 + 8Y_2$

Kendala $Y_1 + 2Y_2 \geq 5$

$Y_1 + 3Y_2 \geq 4$

$2Y_1 - Y_2 \geq 12$

$Y_1 \geq 0; Y_2$ tak terbatas

Penyelesaian Primal (Tabel 1)

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	R	Solusi
Z	$-5-2M$	$-12+M$	$-4-3M$	0	0	$-8M$
X_4	1	2	1	1	0	10
R	2	-1	3	0	1	8
Z	-7/3	-40/3	0	0	$4/3+M$	32/3
X_4	1/3	7/3	0	1	-1/3	22/3
X_3	2/3	-1/3	1	0	1/3	8/3
Z	-3/7	0	0	40/7	$-4/7+M$	368/7
X_2	1/7	1	0	3/7	-1/7	22/7
X_3	5/7	0	1	1/7	2/7	26/7
Z	0	0	3/5	29/5	$-2/5+M$	54 4/5
X_2	0	1	-1/5	2/5	-1/5	12/5
X_1	1	0	7/5	1/5	2/5	26/5

Tabel Awal Dual (Tabel 2)

Basis	Y_1	Y_2'	Y_2''	Y_3	Y_4	Y_5	R_1	R_2	R_3	Solusi
W	$-10+4M$	$-8+4M$	$8+4M$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$21M$
R_1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4

Tabel Akhir Dual

Basis	Y_1	Y_2'	Y_2''	Y_3	Y_4	Y_5	R_1	R_2	R_3	Solusi
W	0	0	0	-26/5	-12/5	0	26/5 $-M$	12/5 $-M$	$-M$	54 4/5
Y_5	0	0	0	-7/5	1/5	1	7/5	-1/5	-1	3/5
Y_2''	0	-1	1	2/5	-1/5	0	-2/5	1/5	0	2/5
Y_1	1	0	0	-1/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	29/5

Penyelesaian dual optimal melalui table simplex: W= 54 4/5; Y_1 =29/5; $Y_2 = Y_2' = Y_2''$= -2/5

Informasi ini dapat diperoleh secara langsung dari table primal optimal dengan menggunakan persamaan sebagai berikut:

Koefisien pada persamaan Z optimal dari suatu peubah awal primal	=	Beda antara ruas kiri dan ruas kanan dari kendala dual yang bersesuaian dengan peubah awal primal

Dari Tabel 1 (Primal menuju Dual)

Pada penyelesaian awal diketahui peubah awalnya adalah X_4 dan R. Koefisien kedua peubah tersebut pada persamaan Z optimal adalah 29/5 X_4 dan (-2/5 + M) R.

Kendala dual yang bersesuaian dengan X_4 dan R adalah $Y_1 \geq 0$ dan $Y_2 \geq -M$

Peubah awal primal	X_4	R
Koefisien pada persamaan Z optimal	29/5	-2/5 +M
Ruas kiri – ruas kanan dari kendala dual yang bersesuaian dengan peubah awal primal	$Y_1 - 0$	$Y_2 - (-M)$

Jadi: 29/5 = $Y_1 - 0$ dan $-2/5 + M = Y_2 - (-M)$

Didapat: Y_1 = 29/5 dan Y_2= -2/5

Dari Tabel 2 (Dual menuju Primal)

Peubah awal dual	R_1	R_2	R_3
Koefisien pada persamaan W optimal	26/5 $-M$	12/5 $-M$	$-M$
Ruas kiri – ruas kanan dari kendala dual yang bersesuaian dengan peubah awal dual	$X_1 - M$	$X_2 - M$	$X_3 - M$

Jadi $X_1 - M = 26/5 - M$ → X_1 = 26/5

$X_2 - M = 12/5 - M$ → X_2 = 12/5

$X_3 - M = -M$ → X_3 = 0

Dari penyelesaian primal-dual didapat dua hasil yang perlu diperhatikan yaitu:

1. Pada iterasi optimum didapat: Max Z = Min W = 54 4/5 hal ini ditunjukkan dengan cara sebagai berikut:

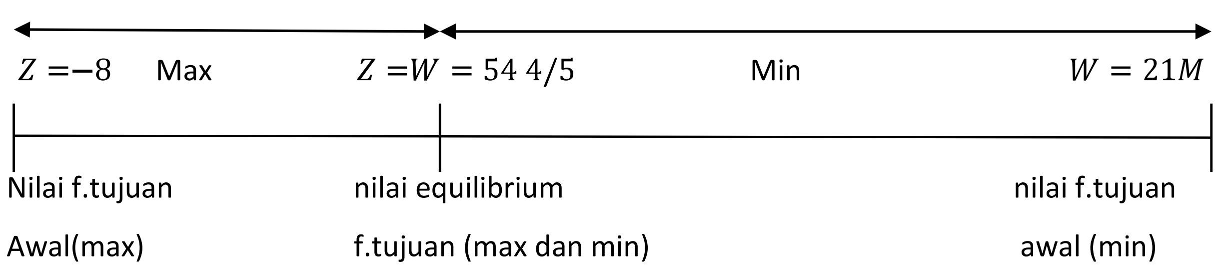
   $Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$

   = 5(26/5) + 12(12/5)+4(0) = 54 4/5

   $W = 10Y_1 + 8Y_2$

   = 10(29/5)+8(-2/5) = 54 4/5

2. Pada masalah <u>memaksimumkan</u>, nilai fungsi tujuan awal $Z = -8M$, pada iterasi selanjutnya nilai ini <u>meningkat</u> hingga didapat $Z = 54\ 4/5$, sedangkan pada masalah <u>meminimumkan</u> nilai fungsi tujuan awal $W = 21M$ dan pada iterasi selanjutnya nilai ini <u>menurun</u> hingga didapat $W = 54\ 4/5$

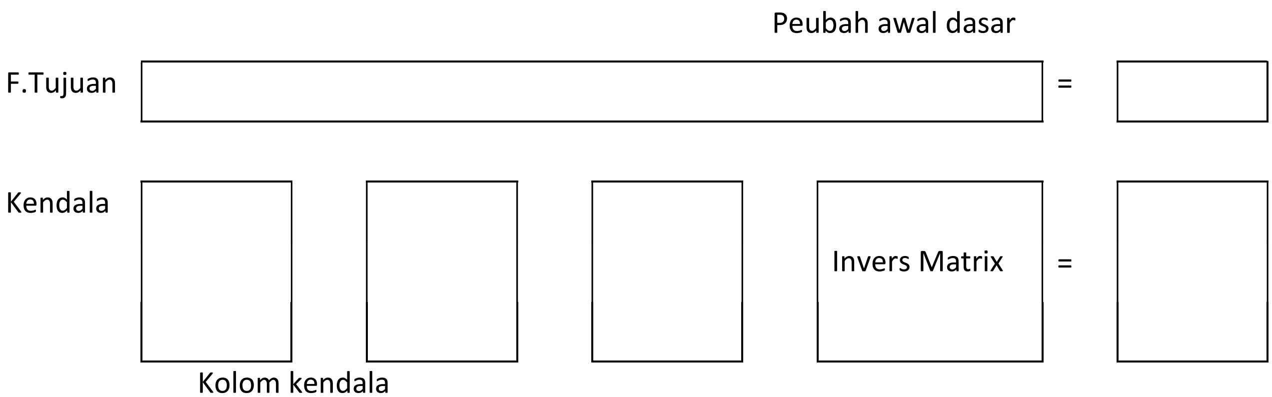


Hal ini menunjukkan bahwa:

Nilai fungsi tujuan untuk penyelesaian yang layak pada masalah minimum selalu menjadi batas atas pada nilai f. tujuan untuk penyelesaian pada masalah maksimum.

Kondisi ini sangat diperlukan agar proses memaksimum dan meminimumkan mencapai titik impas dimana nilai tujuan dari kedua masalah tersebut sudah tak dapat ditingkatkan lagi. Titik impas dicapai bila nilai tujuan dari maksimum = nilai tujuan dari minimum dari titik impas ini merupakan penyelesaian optimal.

5.2.2 Perhitungan dalam Primal



Perhitungan kendala kolom

$$\begin{pmatrix}\text{Kolom pada}\\ \text{iterasi ke}-\text{i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Invers pada}\\ \text{iterasi ke}-\text{i}\end{pmatrix} \text{ X } \begin{pmatrix}\text{Model pada}\\ \text{Kolom mula}-\text{mula}\end{pmatrix}$$

Perhitungan baris pada f.tujuan

Elemen X_i pada Persamaan f.tujuan	=	Ruas kiri dari kendala dual yang bersesuaian	-	Ruas kanan dari kendala dual yang bersesuaian

Nilai dual peubah Pada itersasi ke i	=	Koefisien tujuan mula-mula dari peubah dasar primal pada iterasi ke-i	X	inverse pada iterasi ke-i

Contoh:

Max $\quad Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

Kendala

$$
\begin{aligned}
X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 \quad &= 30 \\
3X_1 \quad + 2X_3 \quad + X_5 \quad &= 60 \\
X_1 + 4X_2 \quad\quad + X_6 &= 20
\end{aligned}
$$

Jika diberikan matrix invers dan peubah dasar yang bersesuaian, hitunglah persamaan kendala dan persamaan tujuannya.

$$(X_4, \quad X_3, \quad X_6); \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab:

Perhitungan kolom:

$$(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(X_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(X_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Perhitungan baris:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= Y_1 + 3Y_2 + Y_3 - 3 \\
X_2 &= 2Y_1 + 4Y_3 - 2 \\
X_3 &= Y_1 + 2Y_3 - 5 \\
X_4 &= Y_1 - 0 \\
X_5 &= Y_2 - 0 \\
X_6 &= Y_3 - 0
\end{aligned}
$$

Dari perhitungan di bawah didapat

X_1 = 0 + 3(5/2) + 0 -3 = 9/2

X_2 = 0 + 0 + 0 -2 = -2

X_3 = 0 + 2(5/2) -5 = 0

X_4 = 0

X_5 = 5/2

X_6 = 0

Koefisien dari $(X_4, \quad X_3, \quad X_6)$ = (0, 5, 0)

Nilai dual = $(0, \quad 5, \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3)$ = (0, 5/2, 0)

Solusi $= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$

$Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$

= 3(0) + 2(0) + 5(20) = 100

5.3. Metode Dual Simplex

Bila pada suatu iterasi pada program linear didapat penyelesaian sudah optimum, tetapi belum layak (ada pembatas tak negatif yang tidak terpenuhi) maka program linear tersebut harus diselesaikan dengan menggunakan metode dual simplex.

Syarat pada metode dual simplex adalah:

1. Seluruh kendala harus berupa $\leq$
2. Fungsi tujuan boleh maksimum atau minimum

Pada dasarnya metode dual simplex ini menggunakan table yang sama seperti table simplex pada primal, tetapi peubah yang masuk (*entry*) dan yang keluar ditentukan sebagai berikut:

1. Peubah yang keluar (*leaving variable*) pada kondisi layak

   Yang menjadi peubah keluar pada dual simplex adalah peubah basis yang memiliki harga negative terbesar. Jika semua peubah basis telah berharga positif atau nol, berarti keadaan layak telah dicapai.
2. Peubah yang masuk (*entering variable*) pada kondisi optimal
   A. Tentukan perbandingan (rasio) antara koefisien persamaan Z dengan koefisien persamaan peubah yang keluar. Abaikan penyebut yang positif atau nol. Jika semua penyebut berharga positif atau nol, berarti persoalan yang diberikan tidak memiliki penyelesaian layak.
   B. Untuk persoalan meminimalkan peubah yang keluar adalah peubah dengan rasio terkecil, sedangkann untuk persoalan memaksimalkan peubah yang keluar adalah peubah dengan rasio mutlak terkecil.

Contoh

Min	$Z = 2X_1 + X_2$	Min	$Z = 2X_1 + X_2$
Kendala	$3X_1 + X_2 \geq 3$	Kendala	$-3X_1 - X_2 \leq -3$
	$4X_1 + 3X_2 \geq 6$		$-4X_1 - 3X_2 \leq -6$
	$X_1 + 2X_2 \leq 3$		$X_1 + 2X_2 \leq 3$
	$X_1, X_2 \geq 0$		$X_1, X_2 \geq 0$

Min $\quad Z = 2X_1 + X_2$

Kendala

$$-3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Tabel simplex awal:

Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solusi
Z	-2	-1	0	0	0	0
S_1	-3	-1	1	0	0	-3
S_2	-4	-3	0	1	0	-6
S_3	1	2	0	0	1	3

Perhatian bahwa peubah-peubah dasar awal tidak memberikan solusi awal yang layak (S_1 dan S_2 berharga negatif) tetapi koefisien persamaan Z sud memenuhi kondisi optimal. Pada iterasi di atas S_2 (=-6) terpilih sebagai peubah yang keluar, sedangkan peubah yang masuk dipilih berdasarkan:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
Koefisien persamaan Z	-2	-1	0	0	0
Koefisien persamaan S_2	-4	-3	0	1	0
Baris 1 / Baris 2	1/2	1/3	-	-	-

X_2 terpilih sebagai peubah yang masuk

Tabel Simplex

Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Solusi
Z	-2/3	0	0	-1/3	0	2
S_1	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2
S_3	5/3	0	0	2/3	1	-1
Z	0	0	-2/5	-1/5	0	12/5
X_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
S_3	0	0	-1	1	1	0

Metode dual simplex ini juga sangat penting dalam masalah analisa kepekaan.

5.4. Analisa Kepekaan

Suatu penyelesaian program linear harus memberikan informasi yang dinamik. Suatu penyelesaian optimum yang statik akan segera menjadi usang jika kondisi yang digunakan untuk membentuk model berubah karena itu diperlukan analisa kepekaan.

Contoh:

Dari contoh pabrik cat

Max	$Z = 3X_1 + 2X_2$	(Keuntungan)
Kendala:	$X_1 + 2X_2 \leq 6$	(Bahan baku A)
	$2X_1 + X_2 \leq 8$	(Bahan baku B)
	$X_2 - X_1 \leq 1$	(Permintaan)
	$X_2 \leq 2$	(Permintaan)
	$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0$	

Setelah mencapai kondisi optimal, ternyata terjadi perubahan-perubahan sebagai berikut:

1. Departemen produksi ingin mengalihkan 2 ton/hari dari bahan baku B ke proses lain dengan kompensasi menaikan bahan baku A 3 ton/hari.

2. Departemen pemasaran percaya bahwa setelah 6 minggu terjadi perubahan permintaan terhadap cat tembok dari 2 ton menjadi 3 ½ ton /hari
3. Departemen penelitian dan pengembangan menemukan proses baru yang akan mengurangi penggunaan bahan baku A dari 1 ton menjadi 0.8 ton dan bahan baku B dari 2 ton menjadi 1.7 ton untuk memproduksi cat kayu
4. Departemen keuangan mengantisipasi kompetisi pasar dengan mengurangi keuntungan marginal untuk cat kayu dan cat tembok menjadi $2500 dan $1500 per ton
5. Departemen penelitian operasional menentukan bahwa pangsa pasar dari pabrik cat tersebut tidak dapat melebihi dari 3 ton/hari untuk cat kayu
6. Departemen pemasaran memiliki ide untuk meluncurkan merk cat kayu yan lebih murah untuk memenuhi segmen pasar tertentu.

Masalah-masalah di atas merupakan tipe situasi yang dapat dijelaskan dengan analisa kepekaan. Pada dasarnya analisa kepekaan harus dapat menjawab:

- Apakah nilai optimum yang telah diperoleh berubah?
- Jika berubah berapakah nilai optimum yang baru itu?

Jawab dari analisa kepekaan tadi dikategorikan dalam 2 macam yaitu:

- Solusi menjadi tak layak

  Hal ini dapat terjadi jika: - persediaan *resource* (ruas kanan) diubah
  - menambah kendala baru

  (Contoh: kasus 1,2,5)
- Solusi menjadi tidak optimal

  Hal ini dapat terjadi jika: - fungsi tujuan berubah
  - elemen tertentu pada ruas kiri-kendala berubah
  - menambah aktifitas baru

  (Contoh: kasus 3,4,6)

Pada contoh pabrik cat:

Max	$Z = 3X_1 + 2X_2$	Min	$W = 6Y_1 + 8Y_2 + Y_3 + 2Y_4$
Kendala:	$X_1 + 2X_2 \le 6$	Kendala	$Y_1 + 2Y_2 - Y_3 \ge 3$
	$2X_1 + X_2 \le 8$		$2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \ge 2$
	$X_2 - X_1 \le 1$		$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \ge 0$
	$X_2 \le 2$		
	$X_1 \ge 0; X_2 \ge 0$		

Tabel optimum

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Solusi
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
X_5	0	0	-1	1	1	0	3
X_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

5.4.1 Perubahan berpengaruh pada kelayakan (*feasibility*)

5.4.1.1 Perubahan pada ruas kanan kendala

Contoh

- Bahan baku A diubah persediaannya dari 6 ton menjadi 7 ton

  Perhitungan:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Didapat hasil akhir yang layak (ruas kanan positif semua) yaitu:

  $X_1 = 2; X_2 = 2;$

  $Z = 3(3) + 2(2) = 13$

- Dengan persediaan bahan baku A seperti di atas (= 7), persediaan bahan baku B diubah dari 8 menjadi 4.

  Perhitungan:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ \mathbf{4} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

Didapat penyelesaian akhir $X_1 = \frac{1}{3}; X_2 = 10/3; Z = 23/3$

X_5 dan X_6 berharga negative maka penyelesaian ini tidak layak.

Penyelesaian dengan metode dual simplex

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Solusi
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	23/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	10/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	1/3
X_5	0	0	-1	1	1	0	-2
X_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	-4/3
Z	0	0	0	5/3	1/3	0	7
X_2	0	1	0	1/3	2/3	0	2
X_1	1	0	0	1/3	-1/3	0	1
X_3	0	0	1	-1	-1	0	2
X_6	0	0	0	-1/3	-2/3	1	0

Didapat penyelesaian akhir $X_1 = 1;\ X_2 = 2$ dengan $Z = 7$.

Pada contoh ini kelayakan dicapai dengan satu kali iterasi saja, umumnya metode dual simplex memerlukan lebih dari satu kali iterasi untuk mencapai kelayakan.

5.4.1.2 Penambahan kendala baru

Penambahan kendala baru dapat menghasilkan dua kondisi yaitu:

1. Kendala terpenuhi oleh penyelesaian semula, berarti kendala tersebut tak terikat (*non binding*) atau berkelebihan (*redundant*) dan kendala baru ini tidak mengubah penyelesaian
2. Kendala tidak terpenuhi oleh kendala semula, berarti kendala tersebut terikat (*binding*) dan penyelesaian baru diperoleh dengan menggunakan metode dual simplex.

Contoh:

- Andaikan permintaan harian untuk cat kayu tidak akan melebihi 4 ton kendala baru yang terbentuk adalah: $X_1 \leq 4$. Sedangkan pada penyelesaian optimum semula didapat $X_1 = 10/3$ dan $X_2 = 4/3$ berarti masih memenuhi kendala baru tersebut. Hal ini berarti bahwa kendala baru tersebut tak terikat dan penyelesaian semula tak berubah.
- Andaikan permintaan harian untuk cat kayu tidak akan melebihi 3 ton kendala baru yang terbentuk adalah: $X_1 \leq 3$. Kendala ini tidak dapat dipenuhi oleh penyelesaian semula ($X_1 = 10/3$ dan $X_2 = 4/3$).

Penyelesaian

1. Ubah kendala baru tersebut dalam bentuk baku:

$$X_1 + X_7 = 3$$

2. Substitusikan peubah dasar semula yang terdapat pada kendala ke bentuk peubah tak dasar mula-mula. Pada table optimal:

$$X_1 - 1/3X_3 + 2/3X_4 = 10/3$$
$$X_1 = 10/3 + 1/3X_3 - 2/3X_4$$

   Substitusi ke kendala baru menjadi

$$10/3 + 1/3X_3 - 2/3X_4 + X_7 = 3$$
$$1/3X_3 - 2/3X_4 + X_7 = -1/3$$

   Jika $X_3 = 0;\ X_4 = 0$ didapat $X_7 = -1/3$, berarti penyelesaian ini tidak layak.

3. Tambahkan kendala yang telah dimodifikasi ke table optimum semula dan gunakan metode dual simplex untuk mencapai kelayakan.

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Solusi
Z	0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	0	10/3
X_5	0	0	-1	1	1	0	0	3
X_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	0	2/3
X_7	0	0	1/3	-2/3	0	0	1	2/3

Z	0	0	1	0	0	0	2	12
X_2	0	1	1/2	0	0	0	-1/2	3/2
X_1	1	0	9	0	0	0	1	3
X_5	0	0	-1/2	0	1	0	3/2	5/2
X_6	0	0	-1/2	0	0	1	1/2	1/2
X_4	0	0	-1/2	1	0	0	-3/2	1/2

Penyelesaian ini memiliki nilai optimum lebih jelek bila dibandingkan dengan nilai optimum semula. Biasanya penambahan kendala baru yang terikat tak dapat meningkatkan nilai Z.

5.4.2 Perubahan yang berpengaruh pada optimalitas

5.4.2.1 Perubahan pada fungsi tujuan

Perhatikan:

1. Jika perubahan fungsi tujuan melibatkan koefisien dari peubah dasar semula, tentukan nilai dual baru dan gunakan untuk menghitung ulang koefisien persamaan Z baru.
2. Jika perubahan fungsi tujuan melibatkan koefisien dari peubah tak dasar saja, gunakan nilai dual semula (langsung dari table semula) dan hitung ulang koefisien persamaan Z yang melibatkan peubah tak dasar saja. Tidak ada perubahan lain yang akan terjadi pada table.

Contoh

- $Z = 3X_1 + 2X_2$ diubah menjadi $Z = 5X_1 + 4X_2$

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (1,4,0,0)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-2/3, 7/3, 0, 0)$$

Koefisien persamaan Z menjadi:

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Solusi
Z	0	0	-2/3	7/3	0	0	4 4/3

Gunakan metode simplex biasa untuk mendapatkan nilai optimalnya

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Solusi
Z	0	0	-2/3	7/3	0	0	4 4/3
X_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
X_5	0	0	-1	1	1	0	3
X_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
Z	0	1	0	2	0	0	16
X_3	0	3/2	1	-1/2	0	0	2
X_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4
X_5	0	3/2	0	1/2	1	0	5
X_6	0	1	0	0	0	1	2

Didapat hasil akhir yang optimal $X_1 = 4; Z = 16$.

5.4.2.2 Perubahan pada penggunaan *resource*

Perubahan pada penggunaan *resource* hanya dapat berakibat pada penyelesaian optimal. Padea sub-nbab ini perubahan pada ruas kiri dibatasi untuk peubah tak dasar saja. Perubahan pada koefisien kendala dasar akan mengakibatkan inverse berubah dan perhitungan menjadi kompleks. Cara termudah untuk mengatasi perubahan pada aktifitas dasar adalah dengan menyelesaikannya sebagai masalah baru.

Contoh:

$Z = 4X_1 + X_2$ (X_2 tak dasar)

Penggunaan pada aktifitas dua dari bahan baku A dan B diubah dari 2 menjadi 4 dan dari 1 menjadi 3.

$4Y_1 + 3Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 1$

Bila fungsi tujuan tidak berubah, maka dualnya memiliki nilai yang sama:

Koefisien X_2 baru menjadi 4(0)+3(2)+(0)+(0)-1 = 5 $\geq$ 0

Perubahan tidak mengakibatkan penyelesaian optimal berubah.

Contoh perubahan fungsi tujuan melibatkan koefisien dari peubah dasar

Max $\quad Z = 3X_1 + 5X_2$

Kendala $\quad X_1 \qquad \leq 4$

$2X_2 \leq 24$

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_1, X_2 \geq 0$

Penyelesaian optimal:

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	9/2	0	0	0	5/2	45
X_3	1	0	1	0	0	4
X_2	3/2	1	0	0	½	9
X_4	-3	0	0	1	-1	6

Diubah menjadi:

$Z = 3X_1 + 3X_2$

$X_1 \qquad \leq 4$

$\mathbf{3}X_2 \leq 24$

$3X_1 + \mathbf{4}X_2 \leq 18$

(X_2 penyelesaian basis)

$$Z - C = Y'A' - C = (0 \quad 0 \quad 5/2)\begin{pmatrix} -0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} - (-3)$$

= 10 – 3 = 7

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tabel revisi

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	9/2	0	0	0	5/2	45
X_3	1	0	1	0	0	4
X_2	3/2	**2**	0	0	1/2	9
X_4	-3	**-1**	0	1	-1	6

Konversi ke bentuk yang sesuai:

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	-3/4	0	0	0	3/4	27/2
X_3	1	0	1	0	0	4
X_2	3/4	1	0	0	1/4	9/2
X_4	-9/4	0	0	1	-3/2	21/2

Tabel akhir:

Basis	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Solusi
Z	0	0	3/4	0	3/4	33/2
X_3	1	0	1	0	0	4
X_2	0	1	-3/4	0	1/4	3/2
X_4	0	0	9/4	1	-3/4	39/2

5.4.2.3 Penambahan aktifitas baru

Penambahan aktifitas baru dapat dianggap sebagi aktifitas tak dasar yang memiliki nilai awal sama dengan nol pada seluruh koefisien pada fungsi tujuan dan kendala pada model mula-mula. Koefisien pada aktifitas baru ini diubah dari nol menjadi nilai baru.

Contoh:

Pada pabrik cat $Z = 3X_1 + 2X_2$ andaikan ditambahkan merk baru yang menggunakan 3/4 dari tiap bahan baku A dan B. Relasi antara cat kayu dan cat tembok $(-X_1 - X_2 \leq 1)$ harus disesuaikan dengan kendala baru. Keuntungan dari produk baru adalah 1 1/2 (ribu dollar).

Misalkan X_7 adalah cat baru:

Max $\quad Z = 3X_1 + 2X_2 + 3/2\, X_7$

Kendala $\quad X_1 + 2X_2 + 3/4X_7 \leq 6$

$$2X_1 + X_2 + 3/4X_7 \leq 8$$

$$-X_1 - X_2 - \quad X_7 \leq 1$$

$$X_2 \quad \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_7 \geq 0$$

Uji kendala dual

$$3/4Y_1 + 3/4Y_2 - Y_3 \geq 3/2$$

Jika X_7 merupakan peubah tak dasar pada table mula-mula, nilai dual tidak berubah:

(3/4) (1/3) + (3/4) (4/3) - (1)(0) - 3/2 = -1/4

Berarti penyelesaian berubah jika $X_7 \geq 0$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

Basis	X_1	X_2	X_7	X_3	X_4	X_5	X_6	Solusi
Z	0	0	-1/4	1/3	4/3	0	0	38/3
X_2	0	1	1/4	2/3	-1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	1/4	-1/3	2/3	0	0	10/3
X_5	0	0	-1	-1	1	1	0	3
X_6	0	0	-1/4	-2/3	1/3	0	1	2/3
Z	0	1	0	1	1	0	0	14
X_7	0	4	1	8/3	-4/3	0	0	16/3
X_1	1	-1	0	-1	1	0	0	2
X_5	0	4	0	5/3	-1/3	1	0	25/3
X_6	0	1	0	0	0	0	1	2

Latihan

1. Diet yang sedang saya jalani mensyaratkan bahwa semua makanan yang saya makan harus berasal dari 4 kelompok makanan dasar (cake cokelat, ice cream, soda dan cheesecake). Saat ini 4 makanan yang tersedia adalah brownies, ice cream chocolate, cola dan cheesecake nanas. Harga brownies 5 (ribu), tiap scoop ice cream chocolate harganya 2 (ribu), tiap botol cola harganya 3 (ribu), dan tiap potong cheesecake nanas harganya 8(ribu). Tiap hari saya membutuhkan 500 kalori, 6 ons chocolate, 10 ons gula, dan 8 ons fat. Tabel nutrisi dari makanan tersebut adalah sbb:

Jenis makanan	Kalori	Chocolate(ons)	Gula(ons)	Fat(ons)
Brownie	400	3	2	2
Ice cream chocolat (1 scoop)	200	2	2	4
Cola (1 botol)	150	0	4	1
Cheesecake nanas (1 potong)	500	0	4	5

Formulasikan model linear programming agar kebutuhan nutrisi yang saya perlukan terpenuhi dengan biaya minimum.

2. Kantor pos membutuhkan pekerja dengan jumlah yang berbeda tiap hari dalam seminggu. Jumlah pekerja penuh waktu yang dibutuhkan per minggu adalah sbb

Hari	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Satbu	Minggu
#Pekerja	17	13	15	19	14	16	11

Aturan ketenagakerjaan menyatakan bahwa seorang pekerja penuh waktu harus bekerja 5 hari berturut-turut kemudian 2 hari berikutnya libur. Misal, pekerja tersebut bekerja dari Senin-Jum'at, maka pada hari Sabtu dan Minggu dia harus libur. Kantorpos ingin memenuhi kebutuhan pekerjanya hanya dengan menggunakan pekerja penuh waktu. Formulasikan model linear programming agar kantor pos dapat meminimumkan jumlah pekerja penuh waktunya.

3. Pada kasus kantor pos, misalkan tiap pekerja penuh waktu bekerja 8 jam/hari. Jadi untuk hari Senin yang membutuhkan 17 pekerja dapat dipandang sebagai kebutuhan akan 8*17=136 jam kerja. Kantor pos dapat memenuhi kebutuhan akan pekerjanya dengan menggunakan pekerja penuh waktu dan pekerja paruh waktu. Di setiap minggu, pekerja penuh-waktu dapat bekerja 5 hari kerja dan 8 jam per hari, sedangkan pekerja paruh waktu bekerja 5 hari kerja secara berturutuan dengan 4 jam kerja per hari. Upah pekerja penuh waktu adalah 15(ribu)/jam sedangkan pekerja paruh waktu 10(ribu)/jam. Aturan ketenaga-kerjaan mensyaratkan batas pekerja paruh waktu hanya boleh mengisi 25% dari kebutuh-kan pekerja/minggu. Formulasikan model linear programming untuk meminimumkan jumlah kebutuhan pekerja di kantor pos/minggu.

4. Andaikan kantor pos dapat memaksa pekerjanya untuk lembur satu hari per minggu. Misalnya pekerja yang biasanya bekerja dari Senin-Jum'at dapat juga bekerja pada hari Sabtu. Tiap pekerja digaji 50(ribu)/hari untuk 5 hari pertama dan 62(ribu) saat lembur (jika

ada). Formulasikan model linear programming untuk meminimumkan jumlah kebutuhan pekerja di kantor pos/minggu.

5. Andaikan kantor pos memiliki 25 pekerja penuh-waktu dan tidak diijinkan untuk menambah atau mengurangi pekerja. Formulasikan model linear programming untuk memaksimumkan jumlah hari libur akhir pekan yang dapat diterima oleh para pekerja.
6. PT. Podoloro membangun perumahan yang disewakan dan daerah pertokoan. Daerah perumahan terdiri dari apartement jenis studio, duplex dan rumah untuk keluarga muda (dengan 1 anak). Potensial permintaan maksimum dari para penyewa diperkirakan sebagai berikut 500 studio, 300 duplex, dan 250 kelurga muda. Namun, jumlah perumahan duplex harus sekurang-kurangnya sama dengan 50% dari jumlah studio dan apartemen untuk keluarga muda. Daerah untuk pertokoan proportional dengan jumlah unit perumahan yang dibangun dengan rate sekurang-kurangnya 10 ft^2, 15 ft^2, dan 18 ft^2 untuk studio, duplex dan keluarga muda secara berturutan. Jumlah tanah yang tersedia hanyalah 10.000 ft^2. Harga sewa per bulan adalah 600 (ribu), 750 (ribu), 1200 (ribu) untuk apartemen studio, duplex, dan untuk keluarga muda. Sewa untuk pertokoan adalah 100(ribu)/ft^2. Tentukan luasan retail dan jumlah apartemen yang harus disewakan, agar didapat pendapatan maksimum.
7. DPRD Kota Supersibuk sedang dalam proses untuk menyetujui konstruksi convention center di lahan selus 200.000 ft^2. Ada dua Site yang diajukan dalam proposal tersebut, keduanya membutuhkan persetujuan DPRD agar dapat diproses secara hukum. Berikut adalah data tentang kedua site tersebut:

	Site 1		Site 2	
Property	Area (1000 ft^2)	Biaya (1000 $)	Area (1000 ft^2)	Biaya (1000 $)
1	20	1000	80	2800
2	50	2100	60	1900
3	50	2350	50	2800
4	30	1850	70	2500
5	60	2950		

Kepemilikan property secara partial diijinkan. Sekurang-kurangnya 75% dari Property 4 harus dibangun jika Site 1 terpilih, dan sekurang-kurangnya 50% dari Property 3 harus dibangun jika Site 2 dipilih. Meskipun property di Site 1 lebih mahal, tapi biaya konstruk-sinya lebih murah dari Site 2, karena infrastruktur pada Site 1 jauh lebih baik dari Site 2.

Biaya konstruksi adalah 25$ juta pada Site 1 dan 27$ juta pada Site 2. Site mana yang harus dipilih dan property yang mana harus dibangun?

8. Sebuah kota akan melakukan proyek pembaharuan 5 perumahan untuk 5 tahun mendatang. Setiap proyek dimulai pada tahun yang berbeda dan memiliki waktu penyelesaian yang berbeda. Berikut adalah table dari situasi dari proyek ini:

	Tahun 1	Tahun 2	Tahun 3	Tahun 4	Tahun 5	Biaya (juta $)	Income/tahun (juta $)
Proyek 1	Start		End			5.0	0.05
Proyek 2		Start			End	8.0	0.07
Proyek 3	Start				End	15.0	0.15
Proyek 4			Start	End		1.2	0.02
Budget (juta $)	3.0	6.0	7.0	7.0	7.0		

Proyek 1 dan 4 harus selesai dalam selang waktu yang ditentukan. Proyek-2 yang lain dapat diselesaikan secara sebagian (partially) sesuai dengan batas budget yang ada, jika diperlukan. Namun demikian, tiap proyek harus selesai sekurang-kurangnya 25% dalam selang waktu yang ditentukan (durasinya). Pada akhir tiap tahun, bagian proyek yang telah selesai langsung dapat digunakan oleh penyewa dan pendapatan (income) dapat diterima oleh kota tersebut secara proporsional. Misalnya, jika 40% dari Proyek 1 dapat diselesaikan di Tahun 1 dan 60% di Tahun 3, maka pendapatan yang diperoleh selama 5 tahun perencanaan tersebut adalah 0.4*50000 (untuk Tahun 2) + 0.4 * 50.000 (untuk Tahun 3) + 50.000 (untuk Tahun 4) + 50.000 (untuk Tahun 5) = (4 x 0.4 + 2 x0.6) x 50.000$. Tentukan penjadwalan proyek yang akan memaksimumkan total income selama lima tahun perencanaan. Untuk penyederhanaan, time value of money tak perlu diperhitungkan.

Bab 6

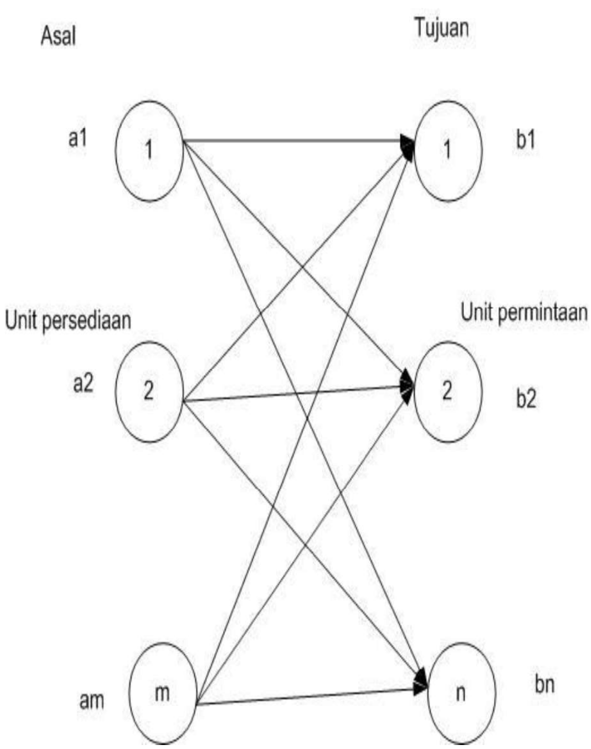
Model Transportasi

6.1. Definisi dan Aplikasi dari Model Transportasi

Persoalan transportasi membahas masalah pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber (*supply*) ke sejumlah tujuam (*destination*) dengan tujuan meminimumkan biaya pengangkutan yang terjadi.

Ciri-ciri khusus persoalan transportasi adalah:

1. Terdapat sejumlah sumber dan sejumlah tujuan tertentu
2. Kuantitas komoditas atau barang yang didistribusikan dari setiap sumber dan yang diminta oleh setiap tujuan besarnya tertentu.
3. Komoditas yang dikirim atau diangkut dari suatu sumber ke suatu tujuan, besarnya sesuai dengan permintaan dan atau kapasitas sumber
4. Biaya transportasi komoditas dari suatu sumber ke suatu tujuan besarnya tertentu.



Noktah: daerah asal atau tujuan

Garis(arc): alur transportasi dari barang

a_i : Jumlah persediaan barang pada daerah i

b_j : Jumlah permintaan barang pada daerah j

c_{ij} : Biaya pengiriman dari daerah asal i ke daerah tujuan j

Model Program Linear

Min $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$

Kendala

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq a_i; i = 1, \dots, m$

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j; j = 1, \dots, n$

$X_{ij} \geq 0; \text{untuk setiap } i, j$

Kendala 1 berarti: jumlah pengiriman dari suatu daerah asal tidak dapat melebihi persediaan yang ada di daerah asal tersebut.

Kendala 2 berarti: jumlah pengiriman ke suatu daerah tujuan harus memenuhi permintaan.

Pada model di atas jumlah persediaan keseluruhan adalah $\sum_{i=1}^{m} a_i$ harus sekurang-kurangnya sama dengan jumlah permintaan keseluruhan $\sum_{j=1}^{n} b_j$. Bila jumlah persediaan keseluruhan sama dengan jumlah permintaan keseluruhan ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) maka model transportasi dikatakan sebagai model transportasi yang seimbang (*balanced transportation model*)

Model program linear: Min $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij}$

Kendala

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i; i = 1, \dots, m$

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq b_j; j = 1, \dots, n$

$X_{ij} \geq 0; \text{untuk setiap } i, j$

Contoh 1 (Model transportasi baku)

Suatu perusahaan mobil memiliki pabrik di Jakarta, Tangerang dan Bandung. Penyalur utamanya ada di Surabaya dan Malang. Kapasitas dari ketiga pabrik tersebut untuk kurtal berikutnya adalah 1000,1500 dan 1200 mobil. Permintaanya adalah 2300 dan 1400 mobil. Biaya transportasi/mobil/mil adalah 8 sen. Tabel jarak antara pabrik dan penyalur diberikan sebagai berikut:

Tabel Jarak

	Surabaya	Malang
Jakarta	1000	2690
Tangerang	1250	1350
Bandung	1275	850

Tabel Biaya

	Surabaya	Malang
Jakarta	80	215
Tangerang	100	108
Bandung	102	68

Jumlah persediaan keseluruhan = 1000+1500+1200 = 3700, seimbang dengan

Jumlah permintaan keseluruhan = 2300+1400 = 3700

Program linear:

Min $\quad Z = 80X_{11} + 215X_{12} + 100X_{21} + 108X_{22} + 102X_{31} + 68X_{32}$

Kendala:

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1000 \\
X_{21} + X_{22} \qquad\qquad &= 1500 \\
X_{31} + X_{32} &= 1200 \\
X_{11} + \quad X_{21} + \quad X_{31} \qquad &= 2300 \\
X_{12} \quad + X_{22} \quad + X_{32} &= 1400
\end{aligned}
$$

$X_{ij} \geq 0$; untuk setiap i, j

Tabel Transportasi

	Surabaya		Malang		Persediaan
Jakarta	X_{11}	80	X_{12}	215	1000
Tangerang	X_{21}	100	X_{22}	108	1500
Bandung	X_{31}	102	X_{32}	68	1200
Permintaan	2300		1400		3700

Contoh 2 (model transportasi tak seimbang)

Dari contoh 1. Andarikan pabrik di Tangerang kapasitasnya adalah 1300, maka keadaan menjadi tak seimbang karena jumlah persediaan keseluruhan (=3500) tidak sama dengan jumlah permintaan keseluruhan (=3700).

Artinya:

- Tidak dimungkinkan untuk memenuhi seluruh permintaan dari penyalur
- Terdapat kekurangan (*shortage*) yang mengakibatkan biaya hukuman (*penalty cost*) yaitu biaya kekurangan (*shortage cost*)

Tujuan: Merumuskan ulang model transportasi sedemikian hingga kekurangan yang terjadi sebanyak 200 mobil dapat didistribusikan secara optimal diantara penyalur yang ada.

Penyelesaian: Ditambahkan daerah asal (pabrik) semu dengan kapasitas 200 dan biaya = 0

	Surabaya	Malang	
Jakarta	80	215	1000
Tangerang	100	108	1300
Bandung	102	68	1200
Pabrik semu	0	0	200
	2300	1400	

Pada kasus ini: - jumlah persediaan < jumlah permintaan

- biaya transportasi/satuan = biaya kekurangan/satuan

Jika jumlah persediaan > jumlah permintaan, maka akan ditambahkan daerah tujuan semu.

Contoh: andaikan permintaan dari Surabaya turun menjadi 1900 mobil maka:

	Surabaya	Malang	Penyalur Semu	
Jakarta	80	215	0	1000
Tangerang	100	108	0	1300
Bandung	102	68	0	1200
	2300	1400	400	

Artinya:

- Jumlah mobil yang dikirim ke distributor semu merupakan kelebihan produk dari pabrik
- Dikenai biaya penyimpanan (*storage/inventory cost*) untuk menyimpan (*holding*) mobil di pabrik
- Biaya transportasi semu = biaya penyimpanan.

Contoh 3 (multicommodity transportation model)

Jika pabrik mobil tersebut memproduksi 4 model yang berbeda M1, M2, M3 dan M4. Pabrik di Tangerang memproduksi M1, M2 dan M4. Model M1 dan M2 hanya diproduksi di Bandung. Pabrik di Jakarta memproduksi model M3 dan M4. Kapasitas dari masing-masing pabrik serta permintaan dari penyalur untuk tiap-tiap model diberikan sebagai berikutL

	Model				
	M1	M2	M3	M4	Keseluruhan
Pabrik					
Jakarta			700	300	1000
Tangerang	500	600		400	1500
Bandung	800	400			1200
Penyalur					
Surabaya	700	500	500	600	2300
Malang	600	500	200	100	1400

Biaya transportasi 8000/mobil/mil untuk seluruh mobil

Penyelesaian terpisah:

	Surabaya	Malang	
Tangerang	100	108	500
Bandung	102	68	800
	700	600	

Model M1

	Surabaya	Malang	
Tangerang	100	108	600
Bandung	102	68	400
	500	500	

Model M2

	Surabaya	Malang	
Jakarta	100	108	700
	500	200	

Model M3

	Surabaya	Malang	
Jakarta	80	215	300
Tangerang	100	108	400
	600	100	

Model M4

Penyelesaian terpisah ini hanya boleh dilakukan bila model benar-benar independen.

		Surabaya				Malang			
		M1	M2	M3	M4	M1	M2	M3	M4
Jakarta	M3	M	M	100	M	M	M	108	M
	M4	M	M	M	80	M	M	M	215
Tangerang	M1	100	M	M	M	108	M	M	M
	M2	M	100	M	M	M	108	M	M
	M4	M	M	100	M	M	M	108	M
Bandung	M1	102	M	M	M	68	M	M	M
	M2	M	102	M	M	M	68	M	M

6.2. Menyelesaikan Persoalan Transportasi

Tabel untuk persoalan transportasi

	T_1	T_2	…	T_j	…	T_n	a_i
A_1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1j} C_{1j}	…	X_{1n} C_{1n}	a_1
A_2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	…	X_{2j} C_{2j}	…	X_{2n} C_{2n}	a_2
A_i	X_{i1} C_{i1}	X_{i2} C_{i2}	…	X_{ij} C_{ij}	…	X_{in} C_{in}	a_i
A_m	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…	X_{mj} C_{mj}	…	X_{mn} C_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_i		b_m	

6.2.1 Menentukan jawab layak dasar yang pertama

Langkah pertama dalam menyelesaikan persoalan transportasi adalah: menentukan jawab layak dasar yang memenuhi semua kendala atau sistem transportasi yang diperlukan. Dari jawab layak dapat dicari jawab layak optimal yaitu jawab yang meminimumkan transportasi. Ada beberapa metode yaitu:

- Metode pojok barat laut (*north west corner method*)
- Metode biaya terkecil (*least cost method*)
- Metode pendekatan Vogel

6.2.1.1 Metode Pojok Barat Laut

1. Mulai dari pojok barat laut pada table persoalan transportasi yaitu sel (1,1). Bandingkan persediaan di A_1 dengan kebutuhan di T_1 yaitu masing-masing a_1 dan b_1.

   Buat $X_{11} = Min(a_1, b_1)$ 2.

   (a) Jika $a_1 > b_1$ mana $X_{11} = b_1$ teruskan ke sel (1,2) yaitu gerakan mendatar dimana

   $$X_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$$

(b) Jika $a_1 < b_1$ mana $X_{11} = a_1$ teruskan ke sel (2,1) yaitu gerakan tegaki dimana

$$X_{21} = \min(b_1 - a_1, a_2)$$

(c) Jika $a_1 = b_1$ mana $X_{11} = b_1$ dan gerakan terus ke X_{22} (gerakan miring)

(akan dijelaskan pada sub bab 6.3.4)

2. Teruskan langkah ini, hingga sel pada pojok tenggara dari table ini terpenuhi.

Contoh:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
A_1	50	25				75
A_2		15	15			30
A_3			30	35		65
A_4				40	40	80
	50	40	45	75	40	

Kelemahan:

Jawab layak dasar yang didapat dengan menggunakan metode ini jauh dari optimal karena faktor biaya tidak diikutsertakan dalam perhitungan.

6.2.1.2 Metode Biaya terkecil

A. Berdasarkan baris

1. Tentukan biaya terkecil yang terdapat pada baris pertama (tiap baris)
2. Bandingkan permintaan dan persediaan yang ada
3. Alokasikan jumlah barang yang memenuhi permintaan atau persediaan
4. Jika persediaan > permintaan ulang lagi langkah 1 jika tidak
5. Teruskan ke baris berikutnya hingga baris yang terakhir.

Contoh:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
A_1	3	40 / 1	35 / 2	4	5	75
A_2	30 / 2	3	2	2	4	30
A_3	3	4	5	25 / 2	40 / 1	65
A_4	20 / 4	3	10 / 1	50 / 2	1	80
	50	40	45	75	40	

Z = 40(1) + 35(2) + 30(2) + 25(2) + 40(1) + 20(4) + 10(1) + 50(2) = 450

B. Berdasarkan kolom

1. Tentukan biaya terkecil yang terdapat pada kolom pertama (tiap kolom)
2. Bandingkan permintaan dan persediaan yang ada
3. Alokasikan jumlah barang yang memenuhi permintaan atau persediaan
4. Jika persediaan > permintaan ulang lagi langkah 1 jika tidak
5. Teruskan ke kolom berikutnya hingga kolom yang terakhir.

Contoh:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
A_1	20 / 3	40 / 1	2	4	15 / 5	75
A_2	30 / 2	3	2	2	4	30
A_3	3	4	5	40 / 2	25 / 1	65
A_4	4	3	45 / 1	35 / 2	1	80
	50	40	45	75	40	

Z = 20(3) + 30(2) + 40(1) + 45(1) + 40(2) + 35(2) + 15(5) + 25(1) = 455

C. Berdasarkan matrix

1. Tentukan biaya terkecil yang terdapat pada tiap sel (matrix
2. Bandingkan permintaan dan persediaan yang ada
3. Alokasikan jumlah barang yang memenuhi permintaan atau persediaan
4. Ulang langkah 1 hingga seluruh permintaan dan persediaan terpenuhi

Contoh:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
A_1	30 (3)	40 (1)	5 (2)	(4)	(5)	75
A_2	(2)	(3)	(2)	30 (2)	(4)	30
A_3	20 (3)	(4)	(5)	45 (2)	(1)	65
A_4	(4)	(3)	40 (1)	(2)	40 (1)	80
	50	40	45	75	40	

Z = 20(3) + 40(1) + 5(2) + 30(2) + 20(3) + 45(2) + 40(1) + 40(1) = 430

6.2.1.3 Metode pendekatan Vogel (*Vogel's Approximation Method* – VAM)

Metode biaya terkecil dapat menimbulkan kemungkinan terhapusnya sel yang lebih baik, karena baris atau kolom tersebut harus ditinggalkan sesuai dengan kendalanya. Metode Vogel mencegah timbulnya kemungkinan ini dengan cara memilih harga dua biaya terkecil pada tiap baris dan menghitung selisihnya. Selisih ini dinamakan sebagai bilangan Vogel. Demikian juga untuk tiap kolom. Seluruhnya akan didapat $m - n$ bilangan Vogel.

Prosedur VAM

1. Hitunglah penalty (bilangan Vogel) untuk tiap baris (kolom) dengan cara mengurangkan dua biaya terkecil yang terdapat pada tiap baris (kolom)
2. Tandailah baris atau kolom dengan nilai penalti terbesar. Alokasikan sebanyak mungkin peubah dengan biaya terkecil pada baris atau kolom terpilih. Sesuaikan persediaan, permintaan dan silanglah baris atau kolom yang bersesuaian. Jika baris dan kolom

memenuhi suatu permintaan atau persediaan secara bersamaan, hanya satu dari keduanya yang disilang dan baris (kolom) sisanya dinyatakan sebagai persediaan (permintaan) nol dan tidak boleh digunakan lagi untuk menghitung nilai penalty selanjutnya.

3. a. Jika tinggal satu saja baris (kolom) yang belum tersilang STOP

   b. Jika hanya satu baris (kolom) dengan persediaan (permintaan) positif yang belum tersilang, tentukan peubah dasar pada baris (kolom) tersebut dengan metode biaya terkecil.

   c. Jika seluruh baris (kolom) yang belum tersilang memiliki persediaan (permintaan) nol, tentukan peubah dasar nol dengan metode biaya terkecil STOP.

   d. Selain di atas, hitung kembali nilai penalti untuk baris (kolom) yang belum tersilang. Ulangi langkah 2.

Catatan:

Baris dan kolom dengan persediaan (permintaan) nol tidak boleh digunakan dalam perhitungan nilai penalti.

	T_1		T_2		T_3		T_4		T_5			Penalti
A_1	30	3	40	1	5	2		4		5	75	1
A_2	20	2		3		2	10	2		4	30	1
A_3		3		4		5	65	2		1	65	1
A_4		4		3	40	1		2	40	1	80	(2)
	50		40		45		75		40			
	(2)		2		1		2		3			

$Z = 30(3) + 40(1) + 5(2) + 20(2) + 10(2) + 65(2) + 40(1) + 40(1)$

6.2.2 Menentukan Penyelesaian Optimum

6.2.2.1 Metode Faktor Pengali (Multipliers)

- Diberikan faktor pengali: U_i untuk baris ke-i; V_j untuk kolom ke-j; X_{ij} adalah peubah basis
- Untuk setiap X_{ij} harus terpenuhi: $U_i + V_j = C_{ij}$
- Nilai dari faktor pengali ini dapat ditentukan dengan memberi sebarang nilai pada salah satu faktor pengali (biasanya $U_i = 0$)
- Untuk menentukan peubah masuk (*entering variable*), maka untuk tiap peubah tak dasar X_{pq} berlaku: $C_{pq}' = U_p + V_q - C_{pq}$
  Peubah masuk dipilih dari peubah tak dasar dengan nilai C_{pq}' paling positif.
- Dibentuk loop tertutup pada peubah yang masuk, loop ini berawal dan berakhir pada peubah tak dasar. Dari peubah tak dasar buatlah jejak (*path*) tegak dan mendatar. Tiap akhir dari suatu jejak harus peubah dasar, kecuali pada *point* terakhir (=peubah masuk). Tandailah peubah masuk dengan + dan pada tiap titip pada loop tersebut dengan – dan + secara bergantian.
- Lakukan loop ini hingga akhirnya didapat seluruh nilai C_{pq} negative (telah mencapai optimum).

Contoh:

	D_1	D_2	D_3	Persediaan
S_1	50	100	100	120
S_2	200	300	200	170
S_3	100	200	300	160
Permintaan	150	210	90	

Penyelesaian:

	$V_1 = 50$		$V_2 = 150$		$V_3 = 250$		
$U_1 = 0$	120	50		100		100	120
			50		150		
$U_2 = 150$	30	200	140	300	X_{23}-200	200	170
			-				
$U_3 = 50$		100	70	200	90	300	160
	0		-		-		
	150		210		90		

Biaya = 95.000

	$V_1 = 50$		$V_2 = 150$		$V_3 = 50$		
$U_1 = 0$	120	50	X_{12}	100		100	120
	-				-50		
$U_2 = 150$	30	200	50	300	90	200	170
			-				
$U_3 = 50$		100	160	200		300	160
	0		-		-200		
	150		210		90		

Biaya = 77.000

	$V_1 = 50$		$V_2 = 100$		$V_3 = 150$		
$U_1 = 0$	70	50	50	100		100	120
	-				-50		
$U_2 = 150$	80	200		300	90	200	170
$U_3 = 100$	X_{31}+	100	160	200		300	160
	50		-		-150		
	150		210		90		

	$V_1 = 0$		$V_2 = 100$		$V_3 = 0$		
$U_1 = 0$		50	120	100		100	120
	-50				-100		
$U_2 = 200$	80	200		300	90	200	170
$U_3 = 100$	70	100	90	200		300	160
			-		-200		
	150		210		90		

Z =71.000 (optimum)

6.2.2.2 Metode *Stepping Stone*

- Untuk sel(i, j) tentukan satu loop yang memuat sel (i, j) sendiri dan sel-sel dasar (basis)

  Misalnya: $\{(i,j),(i,r),(u,r),\ldots,(s,w)(s,j)(i,j)\}$
- Bila peubah biaya adalah C_{ab} dan koefisien peubah basis adalah 0 atau 1, maka:

$$Z_{ij} - C_{ij} = C_{ir} + C_{ur} + \cdots + C_{sw} + C_{sj} + C_{ij}$$

- Untuk menghitung $Z_{ij} - C_{ij}$ pada tiap sel yang tidak memuat $X_{ij} > 0$ ditentukan sebagai berikut:
    1. Tentukan sel basis terdekat pada basis yang sama sedemikian hingga sel basis lainnya terletak pada kolom yang sama
    2. Buat gerakan horisontal kemudian gerakan vertical
    3. Ulangi gerakan ini dari satu sel basis ke sel basis lainnya hingga satu ketika tiba pada sel yang satu kolom dengan sel yang dihitung nilai $Z_{ij} - C_{ij}$ nya
    4. Hubungkan sel basis ini dengan sel tak basis hingga membentuk suatu loop
    5. Jumlahkan harga semua sel basis dalam loop dengan membuat tanda + dan – secara bergantian dan hasilnya = $Z_{ij} - C_{ij}$
- Proses ini dapat dilakukan untuk semua sel tak basis bila:
    1. $Z_{ij} - C_{ij} > 0$ (masalah meminimumkan) ulang langkah di atas
    2. $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$ (masalah memaksimumkan) berarti penyelesaian optimum
- Sesudah $Z_{ij} - C_{ij}$ dihitung untuk semua sel tak basis, tentukan jawab layak dasar baru sebagai berikut:
    1. Hitung: $Z_{st} - C_{st} = \max(Z_{ij} - C_{ij})$
    2. Tentukan: $\min\{\frac{X^m}{a_{st}} : a_{st} > 0\}$
    3. Tentukan nilai peubah basis baru:
        a. $X_{st} = X_{pq}$
        b. Bila $C_{ab} = q$ maka $X_{ab} = X_{ab} - X_{pq}$ dimana X_{ab}terdapat pada loop (s, t)
        c. Bila $C_{ab} = -1$ maka $X_{ab} = X_{ab} + X_{pq}$ dimana X_{ab}terdapat pada loop (s, t)
        d. Bila X_{ab} tidak terdapat pada loop (s, t) maka $X_{ab} = X_{ab}$
        e. Bentuk table untuk jawab basis baru
        f. Ulangi langkah tersebut di atas hingga didapat $Z_{ij} - C_{ij} < 0$ (optimal)

Contoh:

120	50		100		100	120
		50		150		
30	200	140	300	X_{23}+	200	170
		+		200		
	100	70	200	90	300	160
0		-		+		
150		210		90		

1. Hitung $Z_{ij} - C_{ij}$ dari sel yang tidak memuat peubah basis
   a. Sel (1,2) = (1,1) (2,1) (2,2) (1,2)

      $Z_{12} - C_{12} = C_{11} - C_{21} + C_{22} - C_{12}$ = 50-200+300-100 = 50

   b. Sel(1,3) = (1,1)(2,1)(2,2)(3,2)(3,3)(1,3)

      $Z_{13} - C_{13} = C_{11} - C_{21} + C_{22} - C_{32} + C_{33} - C_{13}$ = 50-200+300-200+300-100 = 150

   c. Sel(2,3) = (2,2)(3,2)(3,3)(2,3)

      $Z_{23} - C_{23} = C_{22} - C_{32} + C_{33} - C_{23}$ = 300-200+300-200 = 200

   d. Sel(3,1) = (3,2) (2,2)(2,1)(3,1)

      $Z_{31} - C_{31} = C_{32} - C_{22} + C_{21} - C_{31}$ = 200-300+200-100 = 0

2. Mencari X_{st} yang masuk dalam basis:

   $\max\{Z_{ij} - C_{ij}\} = \max(50, 150, 200, 0)$ = 200

   Berarti X_{23} menjadi peubah yang masuk menjadi basis

3. Mencari X_{ab} yang keluar dari basis: loop memuat sel (2,3): (2,2)(3,2)(3,3)(2,3)

   $Z_{23} - C_{23} = C_{22} - C_{32} + C_{33} - C_{23}$

   C_{ab} yang mempunyai koefisien +1 adalah C_{22}, C_{33}

   $\min\{X_{22}, X_{33}\} = \min\{140,90\} = 90$

   Berarti X_{33}menjadi peubah basis yang keluar

4. Peubah basis baru:
   a. $X_{23} = X_{33} = 90$
   b. $X_{32} = X_{32} + X_{33} = 70 + 90 = 160$
   c. $X_{22} = X_{22} - X_{33} = 140 - 90 = 50$
   d. peubah lain tetap

Dengan cara yang sama didapat table perhitungan sebagai berikut:

120	50		100		100	120
		50		-50		
30	200	50	300	90	200	170
		+				
	100	160	200		300	160
0		-		-200		
150		210		90		

70	50	50	100		100	120
				-50		
80	200		300	90	200	170
	100	160	200		300	160
50		-		-150		
150		210		90		

	50	120	100		100	120
-50				-100		
80	200		300	90	200	170
		0				
70	100	90	200		300	160
		-		-200		
150		210		90		

6.3. Penyelesaian Persoalan Khusus

Persoalan ini timbul karena:

- Persediaan > permintaan (diatasi dengan tujuan semu/dummy destination)
- Persediaan < permintaan (diatasi dengan pemasok semu/dummy suppliers)

Contoh:

$\boxed{7}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$	24
$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	35
$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$	41
30	20	40	

24 $\boxed{7}$	$\boxed{10}$	$\boxed{9}$ 2	X_{14} $\boxed{0}$ +2	24
6 $\boxed{4}$	20 $\boxed{5}$	9 $\boxed{6}$	$\boxed{0}$	35
$\boxed{9}$	$\boxed{8}$	31 $\boxed{7}$	10 $\boxed{0}$	41
30	20	40		

15 $\boxed{7}$	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{9}$ 2	9 $\boxed{0}$	24
15 $\boxed{4}$	20 $\boxed{5}$	$\boxed{6}$ 2	$\boxed{0}$ 3	35
$\boxed{9}$ 2	$\boxed{8}$ 0	40 $\boxed{7}$	1 $\boxed{0}$	41
30	20	40		

Biaya optimum = 545

6.3.2 Alternatif jawaban optimal

Keadaan dimana terdapat dua atau lebih jawab optimal disebut: keadaan bebas pilih (*indifference*)

Contoh:

14	7		10		9	10	0	24
16	4	19	5		6		0	35
	9	1	8	40	7		0	41
30		20		40				

6.3.3 Bebas pilih indeks

Terjadi bila dua atau lebih sel kosong mempunyai indeks yang akan ditingkatkan dengan kesempatan yang sama.

6.3.4. Kemerosotan (Degenerasi)

- Kemerosotan pada persoalan transportasi mengakibatkan ketidakmampuan untuk mengatur pengembangan semua sel yang bukan basis menjadi basis.
- Kemerosotan muncul jika jawab layak basis awal memuat kurang dari $(m + n - 1)$ peubah basis $X_{ij} > 0$. Hal ini terjadi karena:
  (a) Persediaan dan kebutuhan sama-sama habis pada penentuan jawab layak pertama, akibatnya penentuan jawab berikutnya dihentikan.
  (b) Sub-bagian dari persediaan sama-sama habis dengan kebutuhan atau sebaliknya.

Cara mengatasi:

1. Tentukan sel tambahan sehingga sel yang terisi = $m + n - 1$. Untuk melaksanakan ini tanpa mengganggu jawab yang sudah ada, tambahkan satuan nol terhadap sel yang kosong dan perlakukan seolah-olah keadaan ini benar-benar ada.

Contoh:

75	0				75
	20	5			25
		25	0		25
			40	10	50
				40	40
75	20	30	40	50	

Terlihat bahwa jumlah peubah basis < $m+n-1$, peubah $X_{ij} > 0$ atau

2. Jika terdapat $k < m+n-1$ peubah $X_{ij} > 0$ maka tambahkan sejumlah $m+n-1-k$ sel seharga nol sedemikian hingga terdapat $m+n-1$ sel basis.
3. Untuk menghilangkan timbulnya kemerosotan jawab layak dasar, gunakan $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga: $a_j = a_j + \varepsilon$; $b_j = b_j$; $b_n = b_n + m\varepsilon$, dimana $\varepsilon > 0$ tidak mempengaruhi jumlah, dalam praktek ε dapat dihilangkan. Dengan demikian didapat:

   $\sum_{i=1}^{m}(a_i + \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n + m\varepsilon$ atau $\sum_{i=1}^{m} a_i' = \sum_{j=1}^{n-1} b_j$

75	ε				75+ ε
	20-ε	5+2ε			25+ ε
		25-2 ε	3ε		25+ ε
			40-3ε	10+4ε	50+ ε
				40+ ε	40+ ε
75	20	30	40	50+5ε	

6.4. Model Penugasan

Permasalahan

Terdapat m pekerjaan $(i = 1,2,\dots,m)$ yang harus diselesaikan oleh n mesin $(j = 1,2,\dots,n)$ dengan biaya C_{ij}

Tujuan

Menentukan biaya total minimum

Ketentuan

- Jika suatu pekerjaan tak dapat diselesaikan oleh mesin tertentu, maka C_{ij} yang bersesuaian akan bernilai sama dengan M (biaya yang sangat mahal)
- Persoalan harus dalam keadaan seimbang yaitu dengan menambahkan pekerjaan atau mesin fiktif tergantung pada apakah $m > n$ atau $m < n$ (secara umum diasumsikan $m = n$)

Model Matematika

$$X_{ij} = \begin{cases} 0, \text{jika pekerjaan ke-}j \text{ tidak dikerjakan oleh mesin ke-}i \\ 1, \text{jika pekerjaan ke-}j \text{ dikerjakan oleh mesin ke-}i \end{cases}$$

$\min Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$

Kendala

$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1, i = 1,2, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1, j = 1,2, \dots, m$

Solusi awal dengan metode *north-west corner* selalu mengalami kemerosotan, hal ini akan selalu terjadi pada model penugasan. Penyelesaiannya akan terus-menerus merosot pada tiap iterasi. Untuk itu diperlukan suatu model khusus untuk mendapatkan penyelesaian dari model ini. Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh:

Pekerjaan 1	1	5		7		9	1
Pekerjaan 2		14	1	10		12	1
Pekerjaan 3		15		13	1	16	1
	1		1		1		

Theorema:

Solusi optimal pada model penugasan akan tetap sama jika sebuah konstanta ditambahkan atau dikurangkan pada baris atau kolom dari matrix biaya.

Bukti:

Jika p_i dan q_j dikurangkan dari baris ke-i dan kolom ke-j maka elemen biaya akan menjadi:

$$C'_{ij} = C_{ij} - p_i - q_j$$

Fungsi tujuan menjadi:

$$\begin{aligned} Z' &= \textstyle\sum_i \sum_j C'_{ij} X_{ij} && \textstyle\sum_j X_{ij} = 1 \\ &= \textstyle\sum_i \sum_j (C_{ij} - p_i - q_j) X_{ij} && \textstyle\sum_i X_{ij} = 1 \\ &= \textstyle\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} - \sum_i p_i \sum_j X_{ij} - \sum_j q_j \sum_i p_i X_{ij} \\ &= \textstyle\sum_i \sum_j C_{ij} X_{ij} - \sum_i p_i - \sum_j q_j \end{aligned}$$

$Z' = Z - \text{konstan}$ (hasilnya tetap minimum)

Dari teorema ini maka dibuat matrix C_{ij} dengan masukan nol (*zero entries*). Jika elemen-elemen nol atau himpunan bagiannya membentuk penyelesaian yang layak, maka penyelesaian layak ini optimal. Hal ini dikarenakan biaya tidak dapat menjadi negatif.

Contoh:

	1	2	3	
1	0	2	4	$p_1 = 5$
2	4	0	2	$p_2 = 10$
3	2	0	3	$p_3 = 13$

Perbanyak nilai nol dengan membuat $q_3 = 2$ pada kolom ke-3 didapat:

0	2	2
4	0	**0**
2	**0**	1

Penyelesaian ini layak dan optimal: (1,1), (2,3) dan (3,2) dengan biaya 5+12=13 = 30

Perhatikan biaya ini sama dengan $p_1 + p_2 + p_3 + q_3 = 5 + 10 + 13 + 12 = 30$

6.4.1 Metode yang diperlukan untuk mendapatkan solusi optimal (Metode Hungarian)

Contoh:

	1	2	3	4
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

1. Buat masukan nol (zero entries) dengan mencari nilai p_i dan q_j pada matrix biaya

$$
\begin{array}{c|cccc|l}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline
1 & 0 & 3 & 5 & 2 & p_1 = 1 \\
2 & 2 & 0 & 3 & 2 & p_2 = 7 \\
3 & 0 & 1 & 7 & 3 & p_3 = 4 \\
4 & 3 & 2 & 3 & 0 & p_4 = 5 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|cccc|l}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline
1 & 0 & 3 & 2 & 2 & p_1 = 1 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 2 & p_2 = 7 \\
3 & 0 & 1 & 4 & 3 & p_3 = 4 \\
4 & 3 & 2 & 0 & 0 & p_4 = 5 \\ \hline
 & & & q_3 = 3 & & \\
\end{array}
$$

2. Buatlah garis-garis seminimum mungkin sedemikian hingga seluruh nilai nol yang ada pada baris atau kolom terlewati oleh garis itu.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\
3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\
4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}
$$

3. Pilih elemen terkecil yang tidak terlalui oleh garis. Kurangi tiap elemen yang tidak terlalui garis dengan elemen terkecil ini dan tambahkan elemen yang berada pada perpotongan kedua garis dengan elemen terkecil ini.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
1 & \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 0 & \mathbf{0} & 2 \\
3 & 0 & \mathbf{0} & 3 & 2 \\
4 & 4 & 2 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline
\end{array}
$$

Solusi optimal : (1,1) (2,3) (3,2) (4,4)

Biaya : 1+10+5+5 =21

4. Jika pada langkah 3 solusi optimal tidak diperoleh, ulangi langkah 2 hingga didapat penyelesaian yang layak.

	1	2	3	4	5
1	0	4	2	7	**0**
2	3	2	**0**	4	4
3	1	**0**	2	4	2
4	5	0	0	**0**	2
	0	0	0	0	1

Biaya = 3+3+2+4+9 = 21

6.5 Model *Transshipment* (Pemindahan dari Satu Alat Ankut ke Alat Angkut yang Lain)

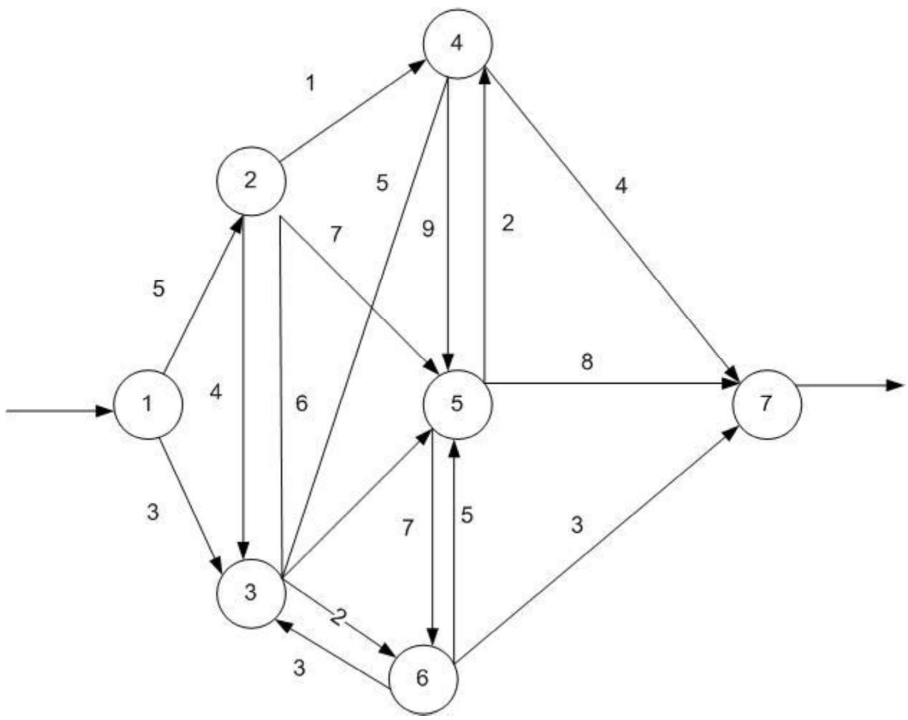
Pada model transportasi baku jalur yang langsung menghubungkan daerah asal dan daerah tujuan merupakan jalur dengan biaya minimum. Berarti diperlukan suatu perhitungan untuk menentukan jalur terpendek sebelum satu unit biaya dari model transportasi dapat ditentukan. Untuk itu diberikan suatu metode alternative untuk menentukan pengiriman barang secara langsung dengan biaya minimum (*minimum direct shipping cost*) yang dirumuskan sebagai model *transshipment*.

6.5.1. Model Transshipment

- Suatu pengiriman barang (*shipment*) baik sebagian atau seluruhnya diperbolehkan untuk melewati/transit pada daerah asal dan daerah tujuan lain sebelum sampai pada daerah tujuan yang direncanakan.
- Tiap node pada jaringan transportasi, baik itu sebagai daerah asal maupun sebagai daerah tujuan, kedua-duanya dapat dianggap sebagai suatu daerah asal peralihan (*transient*) dan daerah tujuan peralihan.
- Jumlah daerah asal (tujuan) pada model *transshipment* akan sama dengan jumlah daerah asal + daerah tujuan pada model baku.
- Agar suaru daerah peralihan dapat dilewati oleh suatu barang, maka ditambahkan suatu *buffer stock* pada tiap daerah asal dan daerah tujuan.
- *Buffer stock*, sekuran-kurangnya harus sama dengan jumlah persediaan (atau permintaan) pada keadaan seimbang di model transportasi baku, sedemikian hingga:

  $B \geq \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

- Unit biaya diperkirakan dari data pada jalur-jalur yang menghubungkan daerah asal dan daerah tujuan pada model *transshipment*.
- *Shipping cost* dari suatu lokasi ke lokasi itu sendiri (missal dari Surabaya ke Surabaya) sama dengan nol.
- *Shipping cost* antara dua lokasi mungkin berbeda tergantung pada arah perjalanannya. (missal: biaya dari Surabaya-Jakarta mungkin berbeda dengan biaya dari Jakarta-Surabaya, jika cara transportasi yang digunakan berbeda)



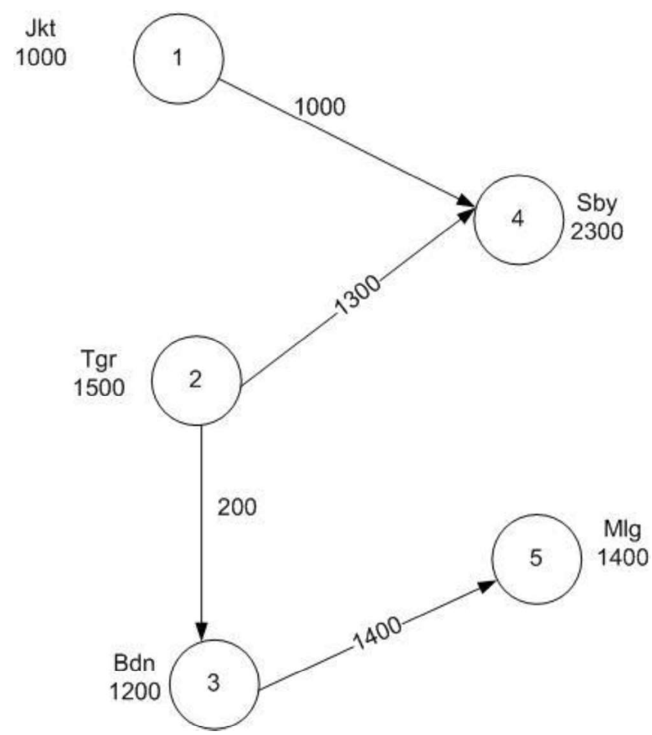
Jawab: Jalur terpendek adalah 1 – 3 – 6 – 7

Contoh:

	Surabay	Malang	
Jakarta	80	215	1000
Tangerang	100	108	1500
Bandung	102	68	1200

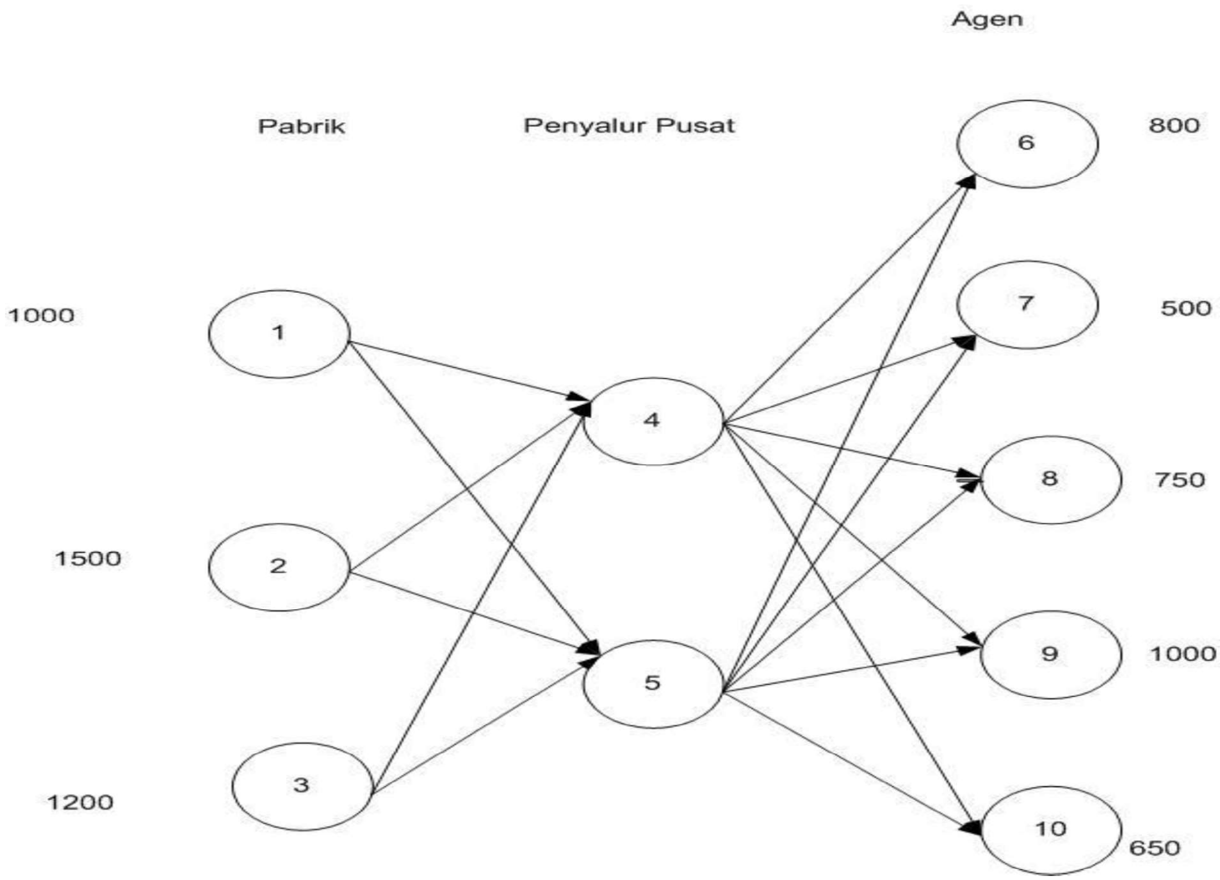
Dibawa ke model *transshipment*

	Jkt		Tgr		Bdn		Sby		Mlg		
Jkt	3700	0		130		90	1000	80		215	4700
Tgr		135	3700	0	200	101	1300	100		108	5200
Bdn		95		105	3500	0		102	1400	68	4900
Sby		79		99		110	3700	0		205	3700
Mlg		200		107		72		205	3700	68	3700



6.5.2 Kasus jika *transshipment shipping* mahal

Dari contoh di atas, andaikan agen perseorangan dapat dianggap sebagai tujuan akhir maka:



- Asumsi: agen dapat memenuhi pesanannya dari setiap penyalur pusat
- *Transshipping* hanya diijinkan melalui penyalur pusat
- Jika penyalur pusat merupakan satu-satunya lokasi *transshipping*, maka tiap-tiap penyalur pusat akan bertindak sebagai daerah asal dan agen sebagai daerah tujuan.
- Selain itu, pabrik bertindak sebagai daerah asal dan agen sebagai daerah tujuan
- Jika model dikembangkan sebagai berikut: diperbolehkan terjadi *transshipping* di dalam dan di antara pabrik dan penyalur pusat, sedangkan antara penyalur pusat dan agen hanya boleh berlaku *direct shipping* maka didapat:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1											4700
2											5200
3											4900
4											3700
5											3700
	3700	3700	3700	3700	3700	800	500	750	100	650	

Model *Transshipment*:

	4	5	6	7	8	9	10	
1								4700
2								5200
3								4900
4								3700
5								3700
	3700	3700	800	500	750	100	650	

- Penyangga hanya diberikan pada penyalur pusat saja, karena hanya penyalur pusat yang bertindak sebagai daerah asal dan daerah tujuan
- Daerah yang diarsir menunjukkan bahwa tidak ada relasi langsung antara pabrik dan agen
- Pada perhitungan, daerah tersebut dikenai biaya yang sangat tinggi $C_{ij} - M$

Latihan

1. Seorang distributor memiliki 3 gudang dan akan mendistribusikan barangnya ke 4 toko yang berada di 4 kota yang berbeda. Biaya distribusi dari satu gudang ke kota tujuan berbeda-beda sesuai dengan jarak dari gudang ke kota tersebut. Adapun informasi tentang biaya transportasi; persediaan yang ada per gudang serta jumlah permintaan per kota dapat diringkas pada tabel informasi.

	Toko 1	Toko 2	Toko 3	Toko 4	Persediaan
Gudang 1	50	45	48	52	25
Gudang 2	52	48	51	54	30
Gudang 3	49	51	50	52	25
Kebutuhan	20	25	15	15	

a. Tentukan model persamaan linear dari masalah ini

b. Dengan menggunakan solver tentukan berapa barang yang harus didistribusikan agar total biaya transportasi minimum, dan memenuhi permintaan serta persediaan yang ada di setiap gudang.

2. Sebuah perusahaan memproduksi enam *spare-part* dengan menggunakan tiga mesin. Untuk bulan mendatang dibutuhkan produksi sejumlah *spare-part* yang dapat diproduksi oleh ketiga mesin tersebut. Biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi setiap spare-part tersebut setiap mesin adalah berbeda. Berikut adalah informasi tentang biaya, kapasitas dan kebutuhan produksi dari masalah ini:

Mesin\ Part	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Kapasitas
M1	3	3	2	5	2	1	80
M2	4	1	1	2	2	1	30
M3	2	2	5	1	1	2	160
Kebutuhan	10	40	60	20	20	30	

a. Modelkan masalah ini sebagai masalah transportasi dengan menggangap Mesin sebagai daerah asal (Origin) dan Spare-part sebagai daerah tujuan (destination). Berapa banyak spare-part yang harus diproduksi di tiap-tiap mesin untuk meminimumkan biaya?

b. Jika kapasitas mesin 2 (M2) meningkat menjadi 50, pemilik pabrik ingin mengurangi total biaya produksi. Perubahan apa yang harus dilakukan pada model untuk mengalisa situasi ini? Berapa banyak total biaya ini akan berkurang dan bagaimana rencana produksi yang baru?

c. Andaikan kapasitas mesin diberikan dalam jam dan bukan dalam jumlah spare-part yang dapat diproduksi. Modifikasikan kendala supply demand menjadi total batasan waktu. Mesin mana yang terpakai sepanjang waktu yang tersedia?

Mesin\ Part	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Kapasitas
M1	1.3	1.3	1.2	1.5	1.2	1.1	50
M2	1.4	1.1	1.1	1.2	1.2	1.1	90
M3	1.2	1.2	1.5	1.1	1.1	1.2	175
Kebutuhan	10	40	60	20	20	30	

d. Selesaikan masalah di atas, dengan mengubah fungsi tujuan menjadi minimal total waktu yang dibutuhkan.

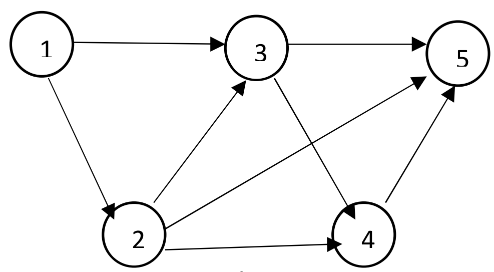
Bab 7

Analisa Jaringan (Network)

Definisi Jaringan

Sebuah network (jaringan) terdiri dari himpunan node (noktah) yang dihubungkan dengan arc (busur). Network dinotasikan dengan (N,A), dimana N: himpunan notes, A: himpunan arc.

Contoh 1:



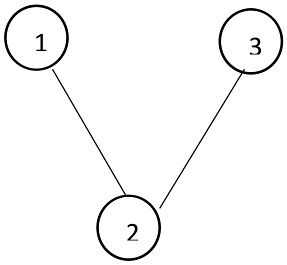
Gambar 1

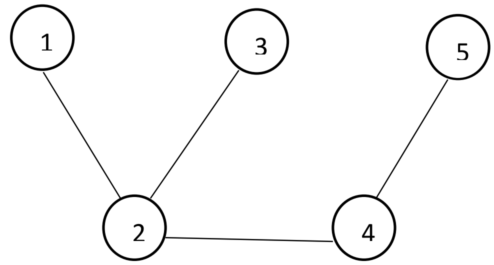
N = {1,2,3,4,5}

A = {(1,2), (1,3), (2,3),(2,5),(3,5), (4,2),(4,5)}

- Setiap jaringan berasosiasi dengan sebuah aliran (*flow*). Secara umum, flow dalam sebuah network dibatasi oleh kapasitas dari arc-nya. Kapasitas ini bisa terbatas (*finite*) ataupun tak terbatas (*infinite*).
- Sebuah arc dikatakan *directed* (berarah) atau oriented jika terdapat aliran (flow) positif dari satu arah dan tidak memiliki aliran (*zero flow*) pada arah yang berlawanan.
- *Directed network* (jaringan berarah) memiliki seluruh arc yang berarah
- Sebuah *path* (jejak) adalah deretan arc yang berbeda yang menghubungkan dua nodes melalui nodes yang lain tanpa mempermasalahkan arah dari aliran (*flow*) dari tiap arc.
- *Connected network* (jaringan yang terhubung). Sebuah jaringan dikatakan sebagai jaringan terhubung bila setiap dua nodes yang berbeda terhubung dengan setidak-tidaknya satu path. Gambar 1 merupakan contoh jaringan terhubung.
- *Tree* (pohon) adalah jaringan terhubung yang tidak memiliki *cycle* (loop) dan merupakan subset (himpunan bagian) dari seluruh nodes yang ada pada jaringan.
- *Spanning tree* adalah *tree* yang menghubungan semua nodes dalam jaringan. *Spanning tree* adalah graph tak berarah dan tidak membentuk *loop*.

Contoh 2:

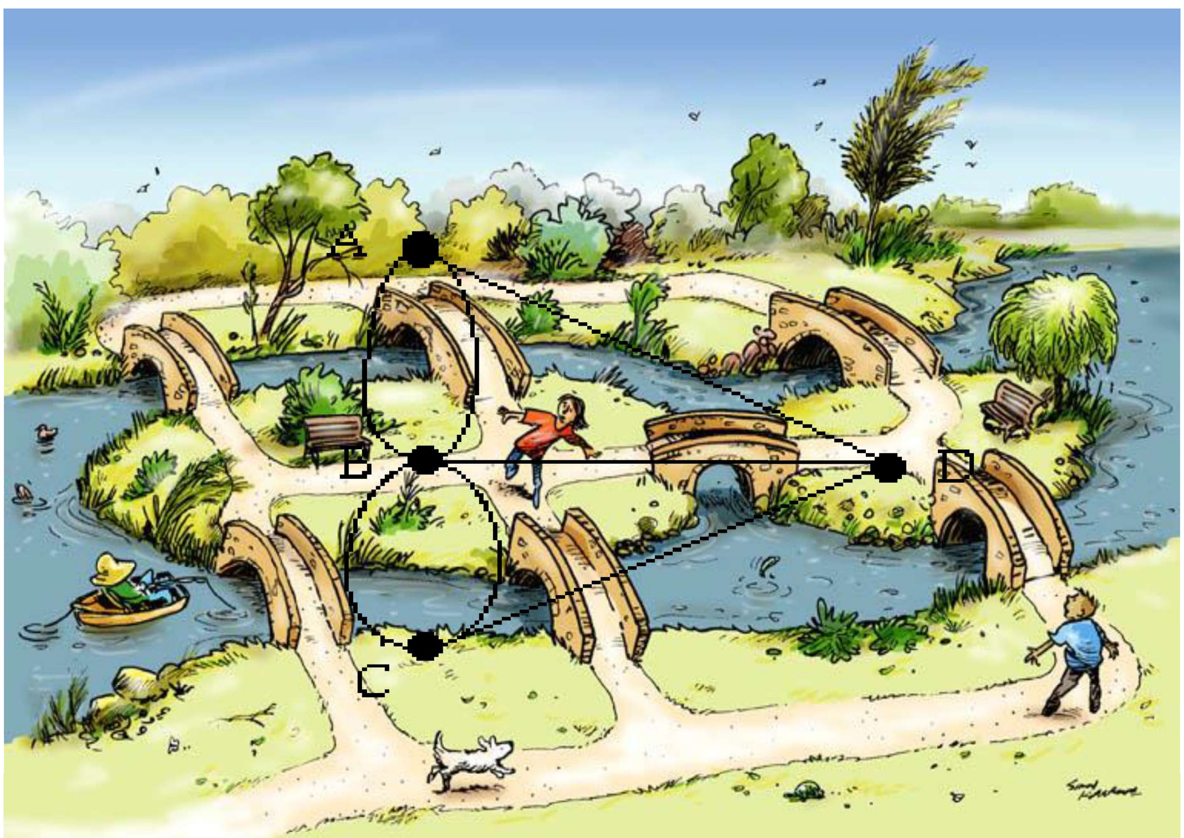




Gambar 2: Tree dari jaringan pada Gambar 1

Gambar3: Spanning tree dari jaringan pada Gambar 1

Contoh 3: Jembatan Koenigsberg



Gambar 4: Jembatan Koenigsberg dan Euler construction path

Terdapat 7 jembatan yang menghubungkan 4 wilayah (A,B.C.D) di kota Prusia. Bagaimana mendapatkan roundtrip yang menghubungkan penduduk yang tinggal di wilayah-wilayah tersebut, dalam 1 putaran. Leonard Euler menyelesaikan masalah ini melalui “path construction” seperti pada Gambar 4.

7.1. Minimal Spanning Tree

Tujuan minimal spanning tree adalah untuk mencari cabang-cabang (brach) yang menghubungkan seluruh node dalam jaringan, sehingga jumlah seluruh panjang cabang yang terpilih minimum.

Secara umum minimal spanning tree dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut:

(1) Tentukan sebarang node

(2) Hubungkan node tersebut dengan node terdekat lainnya

(3) Kedua node yang baru terbentuk ini disebut sabagi <u>himpunan terhubung</u> (*connected set*)

(4) Pilihlah node dari himpunan tak terhubung yang paling dekat dengan sebarang node yang berada pada himpunan terhubung dan tambahkan node terpilih tadi dalam himpunan terhubung

(5) Ulanglah proses ini sampai seluruh node yang ada pada jaringan menjadi anggota dari himpunan tersebut.

Algoritma Minimal Spanning Tree

Misalkan N = {1, 2, …, n} adalah himpunan nodes dari sebuah jaringan.

C_k = himpunan nodes yang telah terhubung secara permanen pada iterasi ke-k

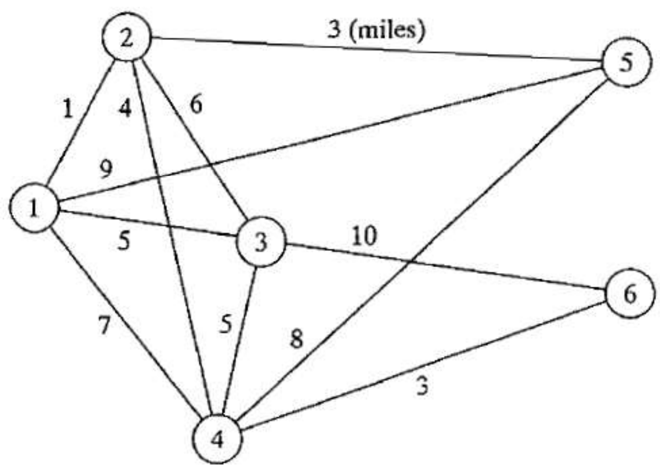
$\bar{C}_k$ = himpunan nodes yang akan dihubungkan secara permanen setelah iterasi ke-k

Langkah 0	Tetapkan $C_0 = \emptyset$ dan $\bar{C}_0 = N$
Langkah 1	Mulailah dengan sebarang node i yang berada pada himpunan yang belum terhubung $\bar{C}_0$ dan tetapkan $C_1 = \{i\}$ dan hitung $\bar{C}_1 = N - \{i\}$. Tetapkan $k = 2$

Langkah ke-k secara umum	Pilih sebuah node j^*, dari $\bar{C}_{k-1}$ yang memiliki arc terpendek di C_{k-1}. Hubungkan j^* secara permanen ke C_{j-1} dan hapus node ini dari himpunan $\bar{C}_{k-1}$ $C_k = C_{k-1} + \{j^*\}$ $\bar{C}_k = \bar{C}_{k-1} - \{j^*\}$ Jika $\bar{C}_k = \emptyset$ STOP; jika $\bar{C}_k \neq \emptyset$ tetapkan $k = k + 1$ ulangi langkah ini.

Contoh 4

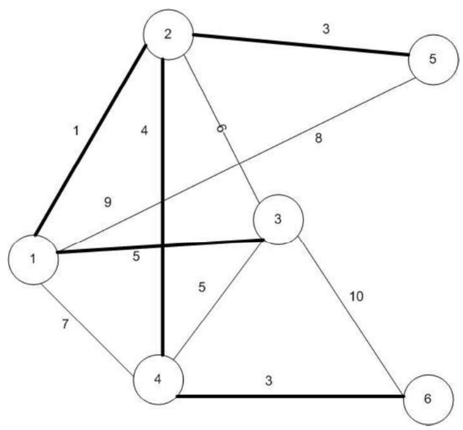
PT. Telkom akan memasang jaringan telepon yang menghubungkan kota-kota yang ada di Pulau Jawa. Tentukan jalur mana yang akan meminimumkan biaya pemasangan kabel telpon jika diberikan jaringan seperti pada gambar di bawah ini (tiap node mewakili 1 kota)



1. Ambil node 1 sebagai acuan, kemudian tentukan himpunan terhubung dan himpunan tak terhubung. Misalkan C = {terhubung} dan C' = {tak terhubung} maka didapat:
   C = {1} C' = {2,3,4,5,6}
2. Node 1 terhubung ke node: 2,3,4,5 jarak yang terdekat dengan node 1 adalah node 2, maka node 2 akan menjadi anggota himpunan terhubung
   C = {1,2} C' = {3,4,5,6} T. Jarak = 1
3. Node 1 dan Node 2 terhubung ke node 3,4,5 jarak yang terdekat antara node 1 dan node 2 adalah node 5, maka node 5 akan menjadi anggota himpunan terhubung
   C = {1,2,5} C' = {3,4,6} T. Jarak = 1 + 3 = 4
4. Demikian seterusnya hingga didapat:

C = {1,2,4,5} C' = {3, 6} T. Jarak = 1 + 3 + 4 = 8
C = {1,2,4,5,6} C' = {3} T. Jarak = 1 + 3 + 4 +3 = 11
C = {1,2,3,4,5} C' = {} T. Jarak = 1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16

Dengan jarak terpendek adalah: 16



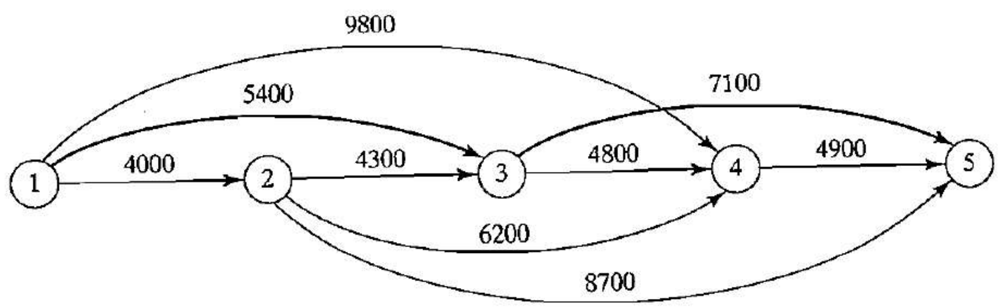
7.2. Masalah Menentukan Jalur Terpendek

Masalah menentukan jalur terpendek berhubungan dengan penentuan jalan-jalan terpendek yang menghubungkan jaringan-jaringan dalam transportasi. Hal yang ingin diketahui adalah jarak terpendek yang menghubungkan daerah asal dengan daerah tujuan.

Contoh 5: Rental Mobil

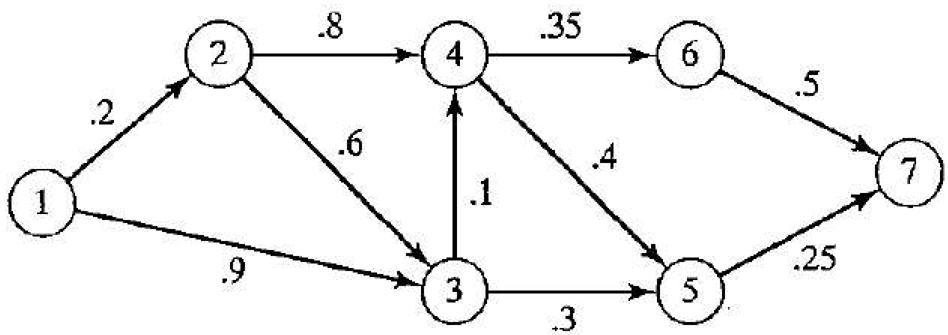
Sebuah rental mobil memiliki kebijakan untuk menggantikan armadanya dalam masa 4 tahun. Pada tiap awal tahun, dibuat suatu keputusan apakah moil itu akan dijual/tidak. Sebuah mobil setidak-tidaknya harus digunakan minimal 1tahun dan maksimal 3 tahun. Tabel berikut menunjukkan biaya untuk mengganti sebuah mobil

	Biaya penggantian ($) setelah mobil digunakan (dalam tahun)		
Mulai	1	2	3
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	-
4	4900	-	-



Contoh 6: Rute yang paling andal

IQ smart tiap hari berkendara ke kantor. Dia ingin mencari rute terpendek untuk sampai di kantor. Sayangnya, rute yang terpilih penuh dengan patrol yang akan mendenda bila seseorang kedapatan sedang mengebut. Rute terpendek bukanlah pilihan terbaik. Smart memutuskan untuk memilih rute yang memaksimumkan probabilitas tidak dihentikan oleh polisi. Jaringan berikut menunjukkan rute yang mungkin dari rumahnya ke kantor, berikut nilai probabilitas untuk tidak dihentikan oleh polisi.



Probabilitas tidak tertangkap pada sebuah rute merupakan hasil perkalian dari tiap jalan yang dilalui. Misal jalur yang dilewati adalah 1 -> 3 -> 5 -> 7, maka nilai probabilitasnya adalah: 0,9 x 0,3 x 0,25 = 0,0675. Tujuan Smart adalah mencari rute yang memaksimumkan probabilitas tidak didenda.

Misalnya $P_{1k} = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_k$

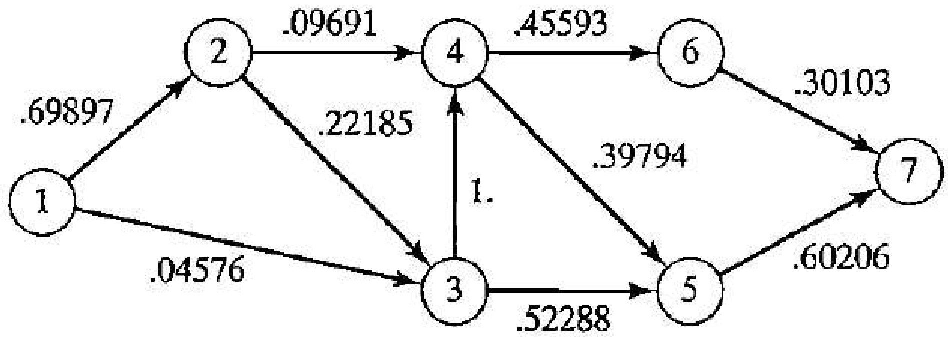
Maka $\log P_{1k} = \log P_1 + \log P_2 + \cdots + \log P_k$

$Max\ P_{1k} \leftrightarrow \max \log P_{1k}$

Karena $\log P_{1k} \leq 0$ maka $\max \log P_{1k} = \min(-\log P_{1k})$

Dengan demikian masalah di atas dapat diselesaikan dengan mengganti nilai probabilitas dengan nilai $-\log P_{1k}$ dan menyelesaikannya dengan mneggunakan rute terpendek (*shortest route network*).

Hasilnya adalah nilai probability maksimum adalah $P_{17} = 0{,}0675$ dengan rute 1,3,5 dan 7.

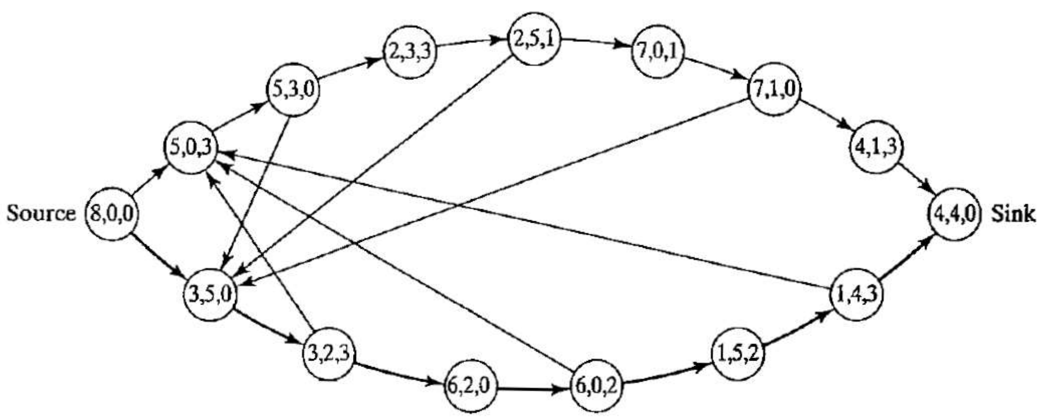


Contoh 7: Teka –teki

Sebuah tempayan berisi 8 gallon air. Ada 2 tempayan kosong lain yang mampu memuat 5 gallon dan 3 gallon air. Air sebanyak 8 gallon ini akan dibagi menjadi 2 bagian yang sama. Gunakan 3 tipe tempayan ini untuk menyelesaikan teka-teki ini. Berapa banayk pemindahan minimum yang diperlukan?

Gunakan konsep masalah mencari rute terpendek (shortest route problem)

Sebuah node merepresentasikan perpindahan air ke tiga tipe tempayan yang terjadi.



Penyelesain optimum: diperlukan 7 kali pemindahan untuk mencapai tujuan.

Contoh 8: Tentukan jalur terpendek pada jaringan yang terdapat pada gambar di bawah ini

Tentukan: d_{ij} = jarak antara dua buah node i dan j yang terhubungkan

u_j = jarak terpendek dari node i menuju ke node j, $u_1 = 0$

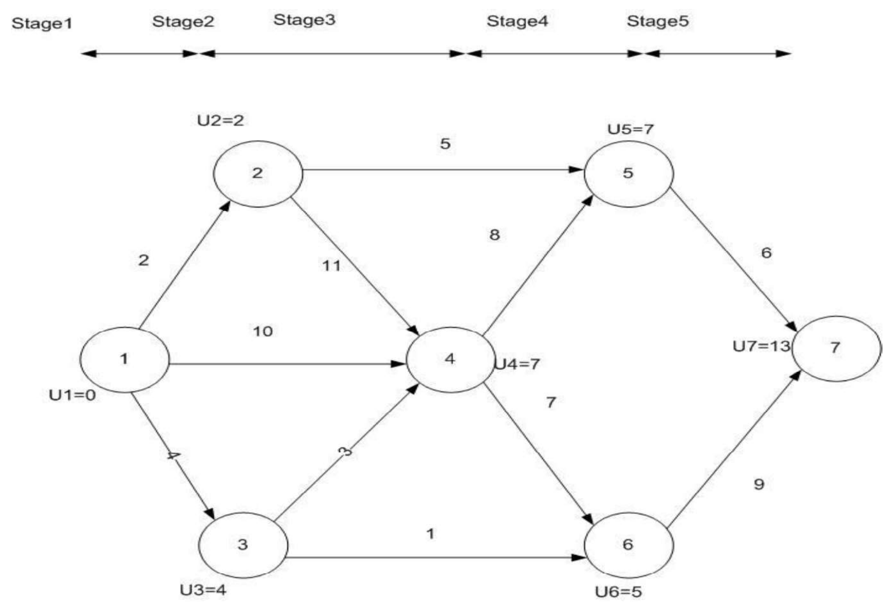
Hitung: $u_j = \min\{u_j + d_{ij}\}$

Dari gambar di atas maka:

Stage 1: $u_1 = 0$

Stage 2: $u_2 = u_1 + d_{12} = 0 + 2 = 2$ (dari 1)

$u_3 = u_1 + d_{13} = 0 + 4 = 4$ (dari 1)



Stage 3: $u_4 = \min\{u_1 + d_{14}, u_2 + d_{24}, u_3 + d_{34}\}$

$= \min\{0 + 10{,}2 + 11{,}4 + 3\} = 7$ (dari 3)

Stage 4: $u_5 = \min\{u_2 + d_{25}, u_4 + d_{45}\}$

$= \min\{2 + 5{,}7 + 8\} = 7$ (dari 2)

$u_6 = \min\{u_3 + d_{36}, u_4 + d_{46}\}$

$= \min\{4 + 1{,}7 + 7\} = 5$ (dari 3)

Stage 5: $u_7 = \min\{u_5 + d_{57}, u_6 + d_{67}\}$

$= \min\{7 + 6{,}5 + 9\} = 13$ (dari 5)

Jadi jarak minimum dari node 1 ke node 7 adalah 13 dengan jalur sebagai berikut:

1 – 2 – 5 – 7

Shortest-Route Algoritmh

1. Dijkstra' Algorithm
2. Floyd's Algorithm

Kedua algoritma ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah mencari rute terpendek di jaraingan cyclic (dengan loop) dan acyclic (tanpa loop).

Algoritma Dijkstra

Algoritma ini didesain untuk menentukan rute terpendek antara node awal terhadap setiap node lain dalam jaringan.

Misalnya

U_i adalah jarak terpendek dari source rute 1 ke node i

d_{ij} (≥ 0) adalah jarak antara arc (i, j)

Label untuk node j berikut adalah$\left[U_j, i\right] = \left[U_i + d_{ij}, i\right], d_{ij} \geq 0$

Node [0, -] adalah node yang tidak memiliki pendahulu (predecessor)

Ada 2 macam node:

- temporary (akan berubah menjadi permanen bila rute terpendek ditemukan)
- permanen

Langkah 0 Beri node awal dengan label permanen [0,-].

Tetapkan $i = 1$

Langkah i (a) Hitung label temporary $\left[U_i + d_{ij}, i\right]$ untuk tiap node$j$ yang dapat dicapai dari node i. Node j bukan permanen label.

Misal pada node j labelnya: $\left[U_j, k\right]$

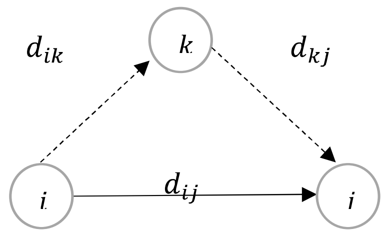
Jika $U_i + d_{ij} < U_j$ gantikan $\left[U_j, k\right]$ dengan $\left[U_i + d_{ij}, i\right]$

(b) Jika seluruh node telah memiliki permanen label STOP

Bila tidak, pilih label $[U_r, s]$ yang memiliki jarak terpendek (=U_r) diantara seluruh temporary label. Set $i = r$ dan ulang langkah ke-i

Algoritma Floyd

- Algoritma Floyd lebih umum daripada algoritma Dijkstra karena algoritma ini digunakan untuk menentukan rute terpendek dianatar sebarang 2 node yang berada dalam jaringan.
- Algoritma ini merepresentasikan jaringan dengan n-node dalam matriks bujur sangkar n x n dengan d_{ij} adalah jarak antara node i ke node j. Bila kedua node ini terhubung maka nilai d_{ij} adalah finite, bila kedua node ini tidak terhubung maka nilai d_{ij} adalah infinite.
- Idea dari Floyd adalah bila ada 3 node i, j, k, jarak dari node i -> j yang melalui k lebih pendek bila $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$



Langkah 0: Definisikan matriks jarak D_0 dan matriks sequene (urutan) S_O sebagai berikut

$D_0 =$

	1	2	...	j	...	n
1	-	d_{12}	...	d_{1j}	...	d_{1n}
2	d_{21}	-	...	d_{2j}	...	d_{2n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	d_{i1}	d_{i2}		d_{ij}		d_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	d_{n1}	d_{n2}	...	d_{nj}	...	-

$S_0 =$

	1	2	...	j	...	n
1	-	2	...	j	...	n
2	1	-	...	j	...	n
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	1	2		j		n
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	1	2	...	j	...	-

General Step k

Definisikan baris k dan kolum k sebagai pivot baris dan pivot kolom. Terapkan: triple operation untuk setiap d_{ij} dalam $D_{k-1}, \forall i, j$. Jika kondisi ini terpenuhi:

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij} \ (i \neq k, j \neq k, i \neq j)$$

(a) Create D_k dengan menggantikan d_{ij} dalam D_{k-1} dengan $d_{ik} + d_{kj}$

(b) Create S_k dengan menggantikan s_{ij} dalam S_{k-1} dengan k set $k = k + 1$ jika $k = n + 1$ STOP. Jika tidak ulang step k.

Linear Programming untuk Masalah Rute Jarak Terpendek

Variabel keputusan: $x_{ij} =$ nilai aliran (flow) yang berada di arc (i, j)

$$= \begin{cases} 1, & \text{jika } arc(i,j) \text{adalah rute terpendek} \\ 0, & \text{bila tidak} \end{cases}$$

Parameter: $C_{ij} =$ panjang arc (i, j)

Fungsi Objektif

$$\min z = \sum_{\substack{arc(i,j) \\ \text{yang terdefinisi}}} C_{ij} x_{ij}$$

Kendala:

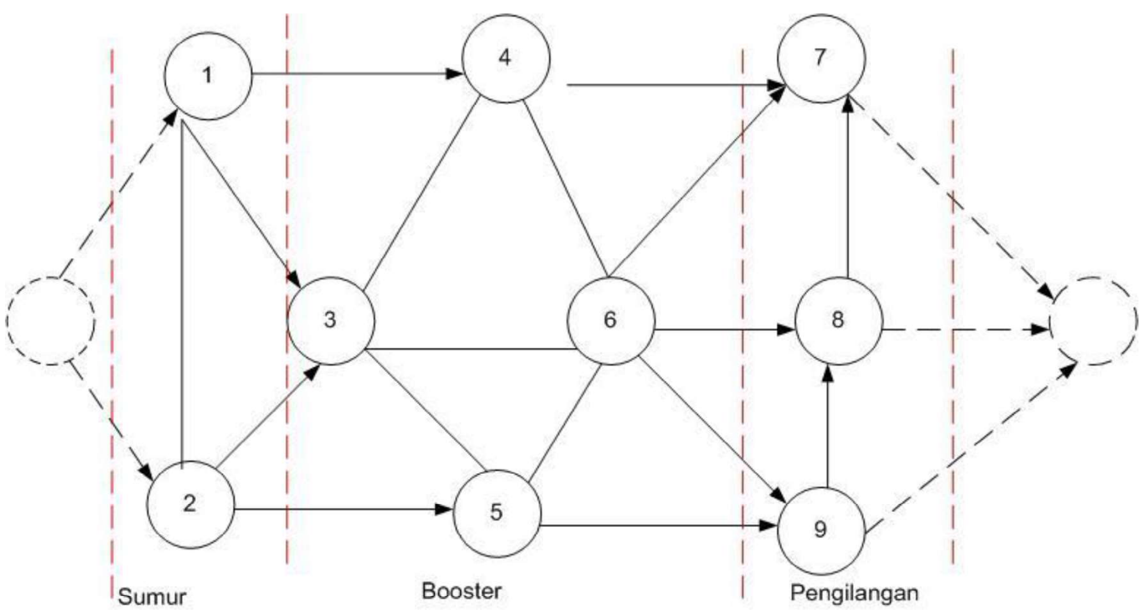
$$\text{Total input flow} = \text{Total output flow}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Eksternal input} \\ \text{yang menuju} \\ node\ j\end{pmatrix} + \sum_{\substack{i \\ \text{dari } arc\ (i,j) \\ \text{yang terdefinisi}}} x_{ij} = \begin{pmatrix}\text{Eksternal output} \\ \text{dari} \\ node\ j\end{pmatrix} + \sum_{\substack{k \\ \text{dari } arc\ (i,j) \\ \text{yang terdefinisi}}} x_{jk}$$

MAXIMAL FLOW MODEL

Pertimbangkan suatu jaringan perpipaan yang mengalirkan minyak mentah dari sumur minyak hingga ke pengilangan. Pompa dan booster dipasang pada jarak-jarak tertentu untuk mengalirkan minyak mentah dalam jaringan. Tiap segmen pipa memiliki laju maksimum (kapasitas) yang terbatas dalam mengalirkan minyak mentah. Segmen pipa ini bisa satu arah atau dua arah tergantung pada desainnya. Bagaimana kita dapat menentukan kapasitas maksimum dari jaringan yang menghubungkan sumur ke pengilangan?

Contoh jaringan perpipaan



Penyelesaian masalah ini memerlukan jaringan dengan Source dan Sink tunggal dengan menggunakan unidirectional yang memiliki kapasitas infinite.

Misalkan arc (i,j), $i < j$, notasi $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ kapasitas aliran dalam 2 arah $i \to j$ dan $j \to i$

A. Enumerasi dari CUT

Cut didefinisikan sebagai himpunan arc yang mana bila arc tersebut dihapus dari jaringan, maka aliran dari source menuju sink akan terputus. Kapasitas cut sama dengan jumlah dari kapasitas pada arc. Cut dengan kapasitas terkecil akan menghasilkan maximum flow dalam jaringan.

MAXIMAL FLOW ALGORITHM (MFA)

Maximal flow algorithm didasarkan pada pencarian breakthrough path (terobosan) dengan net positif flow antara source dan sink.
Misalnya (i, j) adalah arc dengan kapasitas awal $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$, residual (kapasitas selain $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$) adalah (C_{ij}, C_{ji}). Bila node j mendapat aliran dari node i maka kita akan memberi label $[a_j, i]$. a_j adalah flow dari node i ke node j. Berikut adalah langkah-langkah dalam MFA.

Step 1: Untuk semua arc (i, j), tetapkan kapasitas residual sama dengan kapasitas awal yaitu $(C_{ij}, C_{ji}) = (\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$. Misalkan $a_1 = \infty$ dan berilah label pada source node 1 dengan $[\infty, -]$. Tetapkan $i = 1$, lanjutkan ke Step 2.

Step 2: Tentukan S_i, himpunan dari node j yang belum diberi label yang dapat dicapai langsung dari node i melalui arc dengan residual positif (i.e., $C_{ij} > 0, \forall j \in S_i$)
Jika $S_i \neq \emptyset$, lanjutkan ke Step 3
Jika $S_i = \emptyset$, lanjutkan ke Step 4

Step 3: Tetapkan $k \in S_i$ sedemikian hingga $C_{ik} = \max_{j \in S_i}\{C_{ij}\}$
Tetapkan $a_k = C_{ik}$ dan berilah label node k dengan $[a_k, i]$.
Jika $k = n$, sink node telah diberi label dan 'breakthrough path' telah didapatkan. Lanjutkan ke Step 5.
Jika $k \neq n$, tetapkan $i = k$. Lanjutkan ke Step 2.

Step 4: Backtracking.
Jika $i = 1$, tidak ada 'breakthrough' yang mungkin dilakukan. Lanjutkan ke Step 6.
Jika $i \neq 1$, tetapkan $i = r$. Lanjutkan ke Step 2

Step 5: Menentukan Residual: Misalkan $Np = \{1, k_1, k_2, \ldots, n\}$.
Tentukan nodes dengan breakthrough ke-p dari source node 1 ke sink node n.
Max flow dihitung sebagai berikut:

$$f_p = \min\{a_1, a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_n\}$$

Kapasitas residual untuk tiap arc sepanjang breakthrough path akan **berkurang** sebanyak f_p bila ia <u>searah</u> dengan aliran dan akan **bertambah** sebanyak f_p bila ia <u>berlawanan</u> arah dengan aliran.
Untuk node i dan j, residual flow berubah dari nilai (C_{ij}, C_{ji}) saat ini menjadi
(a) $(C_{ij} - f_p, C_{ji} + f_p)$ jika flow mengalir dari i ke j
(b) $(C_{ij} + f_p, C_{ji} - f_p)$ jika flow mengalir dari j ke i
Tuliskan kembali node yang dibuang di Step 4.
Tetapkan $i = 1$, kembali ke Step 2 untuk mencari breakthrough path yang baru.

Step 6: Solusi

(a) Diberikan m breakthrough yang telah ditetapkan
Max flow dalam jaringan adalah

$$F = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

(b) Menggunakan residual awal dan akhir dari arc (i, j), $(\bar{C}_{ij}, \bar{C}_{ji})$ dan (C_{ij}, C_{ji}) optimal flow di arc (i, j) dapat dituliskan sebagai berikut
Misalkan $(\alpha, \beta) = (\bar{C}_{ij} - C_{ij}, \bar{C}_{ji} - C_{ji})$
Jika $\alpha > 0$ optimal flow dari i ke j adalah α
Jika $\beta > 0$ optimal flow dari j ke i adalah β

CPM dan PERT

CPM (Critical Path Method) dan PERT (Program Evaluation and Review Technique) adalah metode jaringan yang didesain untuk menyelesaikan masalah perencanaan, penjadwalan dan pengendalian (control) suatu project.

Sebuah project didefinisikan sebagai kumpulan aktifitas yang saling berinteraksi. Tiap aktivitas membutuhkan waktu dan resource agar aktivitas tersebut dapat terlaksana.

Objective dari CPM dan PERT adalah untuk menentukan penjadwalan dari aktifitas-aktifitas yang akan dilakukan tersebut secara analitik.

Langkah-langkah yang diperlukan adalah

(1) Definisikan aktifitas-aktifitas dari suatu project, precedence relationship, dan waktu yang dibutuhkan
(2) Precedence relationship antar aktifitas direpresentasikan melalui sebuah jaringan.
(3) Lakukan perhitungan untuk mendapatkan waktu penjadwalan untuk project tersebut
(4) Sesuaikan hasi pengadaan dengan kenyataan. Lanjutkan ke Langkah (2)

Pada CPM durasi suatu aktifitas bersifat deterministik, sedangkan pada PERT durasi tersebut bersifat probabilistik.

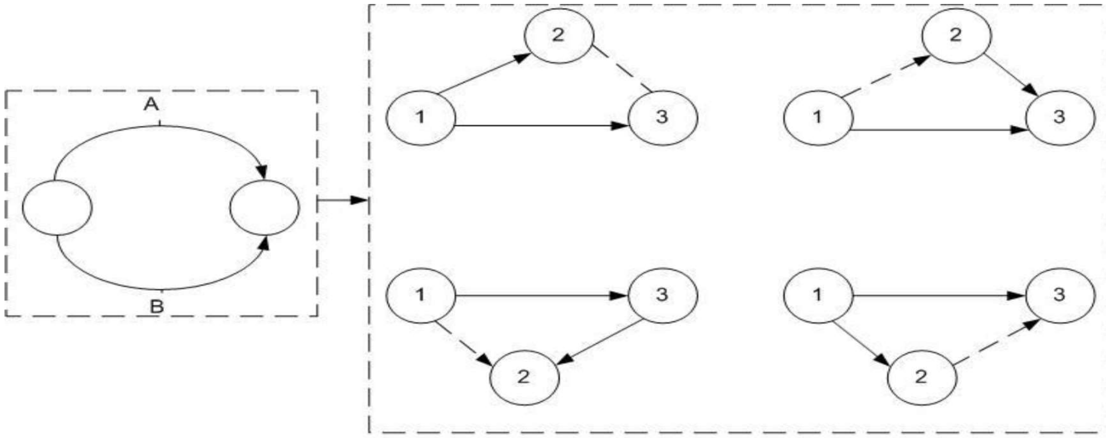
NETWORK REPRESENTATION

Ada 3 aturan untuk merepresentasikan suatu aktifitas ke dalam sebuah jaringan

Aturan 1: Setiap aktifitas hanya boleh diwakili oleh satu arc

Aturan 2: Setiap aktifitas harus didefinisikan oleh 2 node yang berbeda

Contoh:

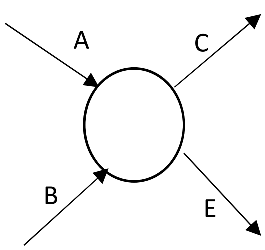


Aturan 3: Untuk mempertahankan precedence relationship yang benar, pertanyaan-pertanyaan berikut harus dijawab sebelum setiap aktifitas ditambahkan dalam jaringan:

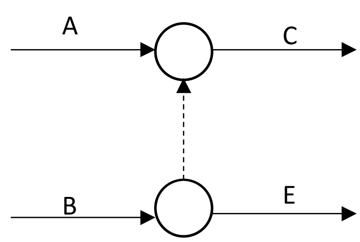
(a) Apakah aktifitas-aktifitas tersebut harus langsung dilaksanakan setelah current activity (aktifitas-aktifitas yang terjadi saat ini)?
(b) Apakah aktifitas-aktifitas tersebut mengikuti current activity
(c) Apakah aktifitas-aktifitas tersebut harus terjadi secara bersamaan dengan current activity.

Contoh:

1. Aktifitas C dimulai segera setelah A dan B selesai
2. Aktifitas E dimulai setelah hanya aktiftias B selesai



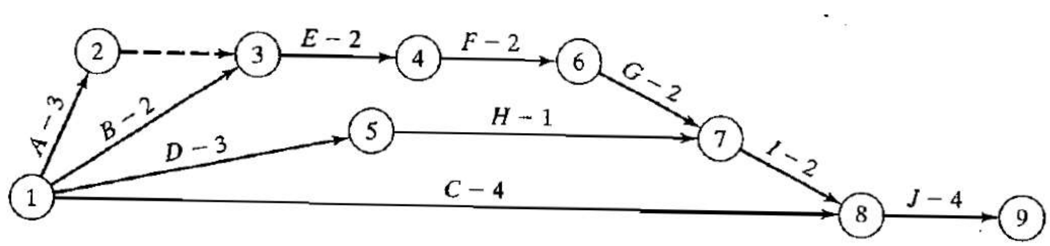
(a) Salah



(b) Benar: gunakan dummy

Contoh: Proses penerbitan buku

	Aktifitas	Predecessor	Durasi (minggu)
A:	Draft buku dibaca oleh editor	-	3
B:	Halaman-halaman contoh disiapkan	-	2
C:	Sampul buku di desain	-	4
D:	Artwork disiapkan	-	3
E:	Penulis menyetujui draft buku yang telah diedit dan menyetujui halaman-halaman contoh	A, B	2
F:	Buku mulai diformat	E	4
G:	Penulis melihat (mereview) halaman-halaman yang telah diformat	F	2
H:	Penulis melihat (review) hasil artwork	D	1
I:	Percetakan menyiapkan plakat cetak	G.H	2
J:	Buku siap dijilid	C,I	4



PERHITUNGAN CRITICAL PATH (CPM)

Hasil: waktu penjadwalan dari sebuah project

(1) Total durasi dari sebuah project dapat diselesaikan
(2) Klasifikasi dari aktifitas-aktifitas yang ada dalam sebuah project apakah aktifitas tersebut termasuk critical atau tidak critical.

Sebuah aktifitas dikatakan critical jika antara start hingga finish tak ada kelonggaran waktu. Sebuah aktifitas dikatakan non-critical jika terdapat beberapa jadwal yang diperbolehkan selesai terlebih dahulu atau terlambat, tanpa mengganggu penyelesaian dari seluruh proyek.

Definisi
Event adalah titik waktu dimana aktifitas-aktifitas berhenti dan aktifitas-aktifitas yang lain mulai dilakukan.
Event direpresentasikan dengan node
$\boxdot_j$ = waktu terawal dari event j terjadi.
Δ_j = waktu paling lambat dari event j terjadi
D_{ij} = durasi dari aktifitas (i, j)

Perhitungan critical path terdiri dari 2 fase:

(1) Forward fase: untuk menentukan waktu terawal dari suatu event terjadi

(2) Backward fase: untuk menentukan waktu paling lambar dari suatu even terjadi

Forward Pass (Waktu paling awal suatu event terjadi, $\boxdot$)

Perhitungan dimulai dari node 1 dan berlanjut hingga akhir node n

Initial Step — Tetapkan $\boxdot_1 = 0$ untuk mengindikasikan proyek dimulai pada waktu 0

General Step j — Diberikan:

- node p, q, ... dan v yang terhubung secara langsung ke node j melalui aktifitas-aktifitas yang menuju (incoming) ke $(p, j), (q, j), \dots, (v, j)$
- waktu terawal events (nodes) p, q, ... dan v yang telah dihitung,

maka waktu terawal event j terjadi dihitung sebagai berikut:

$$\boxdot_j = \max\{\boxdot_p + D_{pj}; \boxdot_q + D_{qj}; \dots.; \boxdot_v + D_{vj}\}$$

Forward pass dinyatakan sudah selesai (lengkap) bila $\boxdot_n$ pada node n telah dihitung. Secara definisi $\boxdot_j$ merepresentasikan path (durasi) terpanjang menuju node j.

Backward Pass (Waktu paling lambat suatu event terjadi, Δ)

Perhitungan dimulai dari node n dan berlanjut hingga akhir node 1

Initial Step — Tetapkan $\Delta_n = \boxdot_n$ untuk menunjukkan waktu terawal dan waktu paling akhir yang terjadi pada node n (node terakhir) adalah sama.

General Step j — Diberikan:

- node p, q, ... dan v yang terhubung secara langsung ke node j melalui aktifitas-aktifitas yang keluar (Outgoing) dari $(j, p), (j, q), \dots, (j, v)$
- waktu paling lambat dari events (nodes) $p, q, \dots$ dan v yang telah dihitung,

maka waktu paling lambat event j terjadi dihitung sebagai berikut:

$$\Delta_j = \min\{\Delta_p - D_{jp}; \Delta_q - D_{jq}; \dots.; \Delta_v - D_{jv}\}$$

Backward pass dinyatakan sudah selesai (lengkap) bila Δ_1 pada node 1 telah dihitung. Pada posisi ini $\Delta_1 = \boxdot_1 = 0$

Berdasarkan perhitungan di atas, aktifitas (i, j) dikatakan critical jika memenuhi 3 kondisi:

1. $\Delta_i = \boxdot_i$
2. $\Delta_j = \boxdot_j$
3. $\Delta_n - \Delta_i = \boxdot_j - \boxdot_i = D_{ij}$

Dari tiga kondisi di atas dapat dikatakan waktu terawal dan waktu paling akhir yang terjadi pada node i dan node j adalah sama dan durasi D_{ij} terpenuhi secara ketat pada selang waktu yang telah disediakan.

Aktifitas yang tidak memenuhi ketika kondisi di atas, dikatakan <u>non-critical.</u>

MENENTUKAN FLOAT

Float adalah kelebihan waktu (slack time) yang tersedia dalam rentangan waktu yang terdapat pada aktifitas non-critical.

1. Total Float $\left(TF_{ij}\right) = \Delta_j - \boxdot_i - D_{ij}$ $\qquad FF_{ij} \leq TF_{ij}$
2. Free Float $\left(FF_{ij}\right) = \boxdot_j - \boxdot_i - D_{ij}$

Aturan red flag (bendera merah) untuk aktifitas non-critical (i, j)

(a) Jika $FF_{ij} = TF_{ij}$: aktifitas dapat dijadwalkan sebarang antara $(\boxdot_j; \Delta_j)$ tanpa menyebabkan konflik dengan jadwal yang lain

(b) Jika $FF_{ij} < TF_{ij}$: awa; suatu aktifitas dapat ditunjda paling lama sebesar Jika FF_{ij} relative terhadap waktu mulai – start time ($\boxdot_i$) tanpa menyebabkan konflik dengan jadwal yang lain.

LP MODEL UNTUK CPM

Variable keputusan: x_{ij} = besaran flow pada aktifitas $(i, j)\ \forall i, j$

Parameter: D_{ij} = durasi aktifitas $(i, j)\ \forall i, j$

Objective function

$$Max\ Z = \sum_{\forall(i,j)} D_{ij} x_{ij}$$

Kendala $\qquad$ Total input flow = Total output flow

$\qquad x_{ij} \geq 0$

PERT NETWORKS

Pada PERT durasi sebuah aktifitas didasarkan pada 3 estimasi:

1) Waktu optimis, a, terjadi bila sebuah aktifitas dapat dieksekusi dengan sangat baik
2) Waktu normal (most likely time), m, terjadi bisa sebuah aktifitas dapat dieksekusi di bawah kondisi normal
3) Waktu pesimis, b,terjadi bila sebuah aktifitas dapat dieksekusi dengan sangat buruk

Berdasarkan estimasi di atas, rata-rata durasi, $\overline{D}$ dan variance υ dapat diaproksimasi sebagai berikut:

$$\overline{D} = \frac{a+4m+b}{6}\,; \upsilon = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

CPM dapat diaplikasikan secara langsung dengan menggantikan D dengan $\overline{D}$

Probabilitas sebuah node j yang berada dalam jaringan dapat terlaksana sesuai dengan jadwal S_j dapat diestimasi sebagai berikut:

Notasi:
e_j : earliest occurrence time dari node j; e_j – random variabel
Untuk mengetahui $\mathrm{E}\{e_j\}$ dan var $\{e_j\}$ perlu diketahui distribusi dari e_j. Bila keduanya telah diketahui maka

$$P\{e_j \leq S_j\} = P\left\{\frac{e_j - \mathrm{E}\{e_j\}}{\sqrt{\mathrm{var}\,\{e_j\}}} \leq \frac{S_j - \mathrm{E}\{e_j\}}{\sqrt{\mathrm{var}\,\{e_j\}}}\right\}$$
$$= P\{Z \leq \; K_j\}$$

Z adalah standard normal
$K_j = \frac{S_j - \mathrm{E}\{e_j\}}{\sqrt{\mathrm{var}\,\{e_j\}}}$

Latihan

1. Tabel berikut memberikan rincian kegiatan ketika seseorang memberi sebuah mobil baru. Buatlah project network untuk masalah tersebut.

	Kegiatan	Pendahulu	Durasi (hari)
A:	Melakukan feasibility study	-	3
B:	Mencari pembeli potensial untuk mobil lama yang akan anda jual	A	14
C:	Melihat-lihat model mobil yang ada saat ini	A	1
D:	Melakukan research untuk semua model mobil yang ada	C	3
E:	Melakukan interview dengan ahli (mekanik) mobil	C	2
F:	Mengumpulkan semua iklan/diskon dari para dealer	C	2
G:	Membanding-bandingkan semua data yang telah dimiliki	D,E,F	1
H:	Memilih tiga model teratas	G	1
I:	Melakukan test drive untuk ketiga pilihan	H	3
J:	Mengumpulkan data tentang garansi dan financial	H	2
K:	Memilih satu mobil	I,J	2
L:	Memilih dealer	K	2
M:	Menentukan pilihan warna dan feature	L	1
N:	Melakukan test-drive terhadap mobil pilihan sekali lagi	L	1
O:	Membeli mobil baru	B, M, N	3

2. Capacitated vehicle routing problem (CVRP) adalah permalasahan untuk menentukan rute kendaraan yang memiliki keterbatasan kapasitas. Tujuan dari permasalahan ini adalah meminimumkan biaya total perjalanan. Adapun kendala yang ada adalah setiap kendaraan harus mengunjungi pelanggan sekali. Setiap pelanggan didatangi dan

ditinggalkan oleh kendaraan yang sama. Total permintaan dari seluruh pelanggan tidak boleh melebihi kapasitas kendaraan. Kendaraan harus tersedia untuk mengantarkan pesanan. Kendaraan mulai bekerja dari depo, dan berakhir ke depo setelah barang terkirimkan semua. Kapasitas dari semua kendaraan yang ada diasumsikan sama.

Apabila:

N : Jumlah nodes (pelanggan dan depo), $N = \{1,\ldots,n\}$

c_{ij} : Biaya transportasi dari pelanggan i ke pelanggan $j(i, j \in N, i \neq j)$

V : Jumlah kendaraan yang tersedia ($v \in V$)

Q : Kapasitas dari kendaraan yang ada

d_i : Permintaan (demand) dari pelanggan i

a. Tentukan variabel keputusan dari masalah di atas [3]
b. Tentukan fungsi tujuan dari masalah di atas [3]
c. Tentukan kendala dari masalah di atas [9]

3. Sebuah perusahaan biskuit mempunyai 3 pabrik yang berlokasi di kota T, B dan K. Produk yang dihasilkan dikirim ke 3 distributor utama yang bertempat di kota J, S dan M. Kapasitas produksi pabrik adalah 150, 900 dan 200 karton untuk T, B, K secara berurutan. Sedangkan jumlah permintaan dari distributor adalah 800, 250, dan 400 karton untuk J, S, M secara berurutan. Biaya transportasi dari pabrik ke distributor diberikan oleh tabel di bawah ini (biaya per karton, dalam ribuan rupiah)

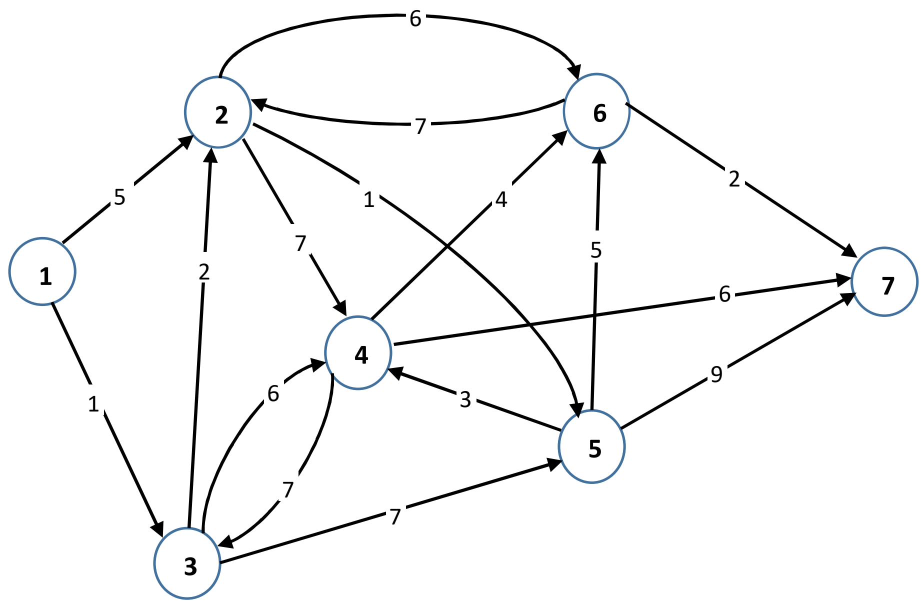
	J	**S**	**M**
T	50	10	60
B	70	40	50
K	30	20	40

a. Ada penalty untuk demand yang tidak terpenuhi, yaitu penalty sebesar 50 ribu rupiah untuk tiap karton permintaan dari J yang tidak dapat dipenuhi, 35 ribu rupiah untuk S, dan 20 ribu rupiah untuk M. Bandingkan jawab-layak-dasar-pertama (*starting solution*) yang didapatkan dari metode *Northwest corner*, *Least-cost matrix*, dan *Vogel Approximation*.

b. Tentukan solusi optimal untuk mengirimkan produk tersebut, dengan penalty seperti pada (a), dengan menggunakan *starting solution* dari metode *Least-cost matrix*. [15]

c. Jika tidak ada biaya penalty, namun demand di M harus terpenuhi, maka tentukan solusi optimalnya dengan *starting solution* menggunakan metodel *Vogel Approximation*.

4. Jika diberikan jarak antar kota 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 seperti gambar di bawah ini, tentukan jarak terpendek dari kota 1 ke 4, dan dari kota 1 ke 7.



Bab 8

Model Ganda (*Multiple Model*)

8.1 Model untuk Pabrik Ganda (*Multi-Plant Model*)

Contoh Kasus:

Suatu industry terdiri atas dua pabrik. Tiap pabrik membuat dua produk, standar dan mewah. Satu unit standar memberi keuntungan sebesar 10 (ribu), sedangkan untuk satu unit mewah membari keuntungan sebesar 15 (ribu). Tiap pabrik menggunakan proses *grinding* dan *polishing* untuk memproduksi produk-produknya. Kapasista *grinding* pada pabrik A adalah 80 jam/minggu dan *polishing* 60 jam/minggu, sedangkan untuk pabrik B adalah 60 dan 75 jam/minggu. Proses *grinding* dan *polishing* dalam jam untuk tiap unit dari tiap tipe pada tiap pabrik diberikan sebagai berikut:

	Pabrik A		Pabrik B	
	Standar	Mewah	Standar	Mewah
Grinding	4	2	5	3
Polishing	2	5	5	6

Dimungkinkan misalnya pabrik B memiliki mesin yang lebih lama dari pabrik A tetapi memberi hasil yang lebih banyak dibandingkan yang dihasilkan oleh pabrik A.

Tiap unit dari tiap produk membutuhkan 4 Kg bahan mentah. Persediaan pada perusaah itu 120 Kg/minggu. Asumsikan pada pabrik A dialokasikan sebanyak 75 Kg/Minggu dan Pabrik B sisanya 45Kg/minggu.

Maksimumkan profit dari tiap-tiap pabrik

Maksimumkan total profit dari industry tersebut dengan mengabaikan alokasi bahan mentahnya.

Penyelesaian:

Model untuk pabrik A

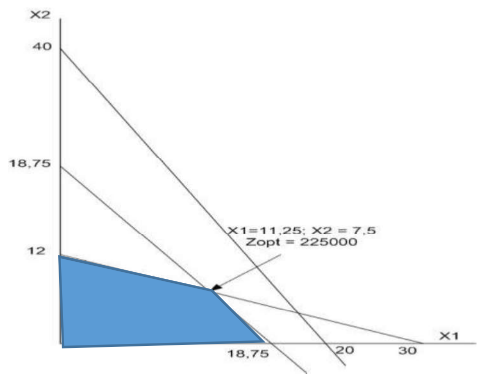
Maks profit A $Z = 10X_1 + 15X_2$ X_1: jumlah tipe standar yang harus diproduksi

Kendala bahan $4X_1 + 4X_2 \leq 75$ X_2: jumlah tipe mewah yang harus diproduksi

Grinding $4X_1 + 2X_2 \leq 80$

Polishing $2X_1 + 5X_2 \leq 60$

$X_1, X_2 \geq 0$



G*rinding* berlebihan sebesar 4(11,25)+2(7,5) = 60 jam

Kapasitas *polishing* surplus sebesar 80-60 =20 jam

Model untuk Pabrik B

Maks profit B $W = 10X_3 + 15X_4$ X_3: jumlah tipe standar yang harus diproduksi

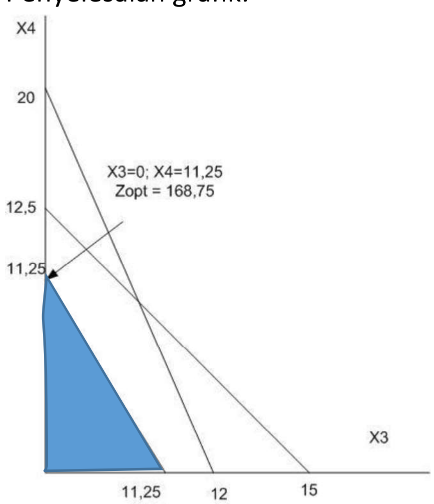
Kendala bahan $4X_3 + 4X_4 \leq 45$ X_4: jumlah tipe mewah yang harus diproduksi

Grinding $5X_3 + 3X_4 \leq 60$

Polishing $5X_3 + 6X_4 \leq 75$

$X_3, X_4 \geq 0$

Penyelesaian grafik:



Kapasitas *grinding* berlebihan sebesar 26,25 jam

Kapasitas *polishing* berlebihan sebesar 7,5 jam

Model untuk seluruh industri

Maks profit A $Z = 10X_1 + 15X_2 + 10X_3 + 15X_4$

Kendala bahan $4X_1 + 4X_2 + 4X_3 + 4X_4 \leq 120$

Grinding A $4X_1 + 2X_2 \leq 80$

Polishing A $2X_1 + 5X_2 \leq 60$

Grinding B $5X_3 + 3X_4 \leq 60$

Polishing B $5X_3 + 6X_4 \leq 75$

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Penyelesaian optimal dengan simplex:

$X_1 = 9{,}17;\ X_2 = 8{,}33;\ X_3 = 0;\ X_4 = 12{,}5; Zopt = 404{,}150$

Kapasitas *grindin* A berlebihan sebesar 26,67 jam dan kapasitas *grinding* B berlebihan sebesar 22,5 jam

Perbandingan antara penyelesaian secara individual dan menyeluruh:

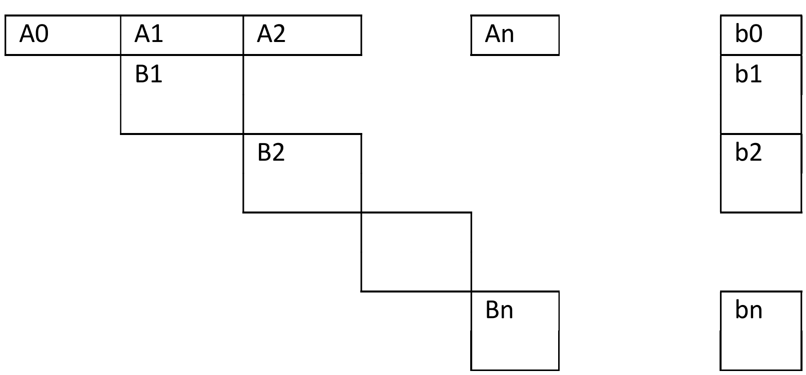
- Total profit menyeluruh = 404,150 lebih besar dari profit A + profit B = 393,750
- Pada profit menyeluruh: $Z = 10X_1 + 15X_2 + 10X_3 + 15X_4$
  Kontribusi pabrik A adalah: 10 (9,17) + 15(8,33) = 216,650
  Kontribusi pabrik B adalah: 10 (0) + 15(12,5) = 187,500
  Bahan baku A = 4 (9,17) + 4 (8,33) = 70
  Bahan baku B = 4(0) + 4(12,5) = 50

Macam struktur umum yang terdapat pada multi-plant model dikenal sebagai *block angular structure*

Pada contoh kasus di atas *block angular structure* nya adalah

Baris objective	10	15	10	15			
	4	4	4	4	Baris umum	<=	120
	4	2				<=	80
	2	5				<=	60
Sub model			5	3		<=	60
			5	6		<=	75

Secara umum



A0, A1,…, An; B1, B2, …, Bn adalah blok koefisien. b1, b2, …, bn adalah kolom koefisien dari suku kanan. A0 kadang ada; kadang tidak ada.

Kolom kendala pada *multi-plant-model* biasanya melibatkan alokasi sumber yang jarang (*scares*) misalnya: bahan baku, kapasitas proses, tenaga kerja, dsb, dari satu pabrik ke pabrik yang lain (lintas *plant*) sehingga kadang terjadi transportasi antar *plant*.

Contoh:

Pada suatu keadaan tertentu dipandang lebih menguntungkan untuk memindahkan suatu produk dari proses menengah dari suatu *plant* ke *plant* yang lain. Dimodelkan:

$$X_1 - X_2 = 0 \quad (1)$$

X_1 : jumlah produk yang ditransportasikan dari *plant* 1 ke *plant* 2.

X_2 : jumlah produk yang ditransportasikan dari *plant* 2 ke *plant* 1.

Dari rumus (1), X_1 hanya akan dilibatkan dalam kendala-kendala yang berelasi dengan submodel untuk *plant* 2.

Baik X_1 maupun X_2 (tetapi bukan kedua-duanya) akan memiliki koefisien biaya pada fungsi tujuan yang menunjukkan sebagai biaya transportasi.

Andaikan suatu masalah dengan sebuah blok angural struktur tidak memiliki kendala umum (kendala yang dipakai bersama), maka optimasi yang terjadi hanya pada tiap-tiap submodel sesuai dengan fungsi tujuan masing-masing model.

Aturan:

- Semakin banyak kendala yang dipakai bersama (kendala umum), semakin banyak interkoneksi antara *plant* yang terpisah
- Jumlah baris umum akan menjadi ukuran yang baik tentang kedekatan antara penyelesaian optimal jika masalah dipandang secara menyeluruh dengan jumlahan dari penyelesaian optimal jika masalah dipandang sendiri-sendiri.

8.2. Model untuk Produk Ganda (*Multi – Product Model*)

Jika produk-produk yang berbeda menggunakan komposisi dan kapasitas proses yang sama maka dimungkinkan untuk menghitung batasan *supply* nya dengan struktur model di atas. Dari Struktur umum di atas $B_1, B_2, \ldots$ mewakili kendala dari tiap-tiap campuran untuk tiap produk. Sub masalah ini akan terdiri dari:

X_{ij}: jumlah komposisi ke-i untuk produk j

Jika komposisi ke-i memiliki batas *supply* maka kendala umumnya adalah:

$\sum X_{ij} \leq$ persediaan komposisi ke-i

Jika komposisi ke-i menggunakan α_{ij} unit dari kapasitas proses dalam produk campuran j, maka kendala umumnya adalah:

$\sum_j \alpha_{ij} X_{ij} \leq$ total kapasitas proses yang tersedia untuk komposisi ke-i

Sebagaimana pada *multi-plant*, jika submodel pada *multi*-produk ini dikombinasikan menjadi multiple model, maka didapat keputusan untuk seluruh masalah.

8.3. Model untuk Periode Ganda (*Multi-Periods Model*)

Dalam model multi periode, tidak hanya ditentukan komposisi bahan baku pada satu bulan tertentu saja, tetapi juga bagaimana pembelian pada tiap bulan dengan kemungkinan adanya penyimpanan untuk digunakan kemudian. Oleh karena itu sangatlah perlu untuk menentukan antara membeli, menggunakan dan menyimpan.

Untuk tiap-tiap komposisi akan terdapat 3 peubah yang berkorespon dengan relasi sebagai berikut:

Jumlah yang disimpan pada akhir periode (t-1)+ Jumlah yang dibeli pada periode ke-t = Jumlah yang digunakan pada periode ke-t + Jumlah yang disimpan pada akhir periode ke t

Relasi ini memberikan kendala dengan tanda "=". Dalam model multi periode, periodenya tidak perlu memiliki durasi yagn sama, beberapa periode dalam 1 bulan sedangkan periode yang lain dapat diagregasikan.

Contoh kasus:

Sejenis makanan diolah melalui proses pemurnian minyak mentah, kemudian mencampukannya kembali setelah minyak tersebut selesai dimurnikan.

Minyak tersebut dikategorikan menjadi dua:

Minyak sayur : Veg_1 dan Veg_2

Minyak non sayur : Oil_1, Oil_2, Oil_3

Tiap-tiap minyak dapat dibeli dengan 2 cara yaitu

Pengiriman langsung (Januari)

Pengiriman tak langsung (dikirim pada bulan-bulan berikutnya)

Harga pada pengiriman langsung dan pengiriman tak langsung adalah sbb (dalam ratusan ribu/ton)

	Veg_1	Veg_2	Oil_1	Oil_2	Oil_3
Januari	110	120	130	100	115
Februari	130	130	110	90	115
Maret	110	140	130	100	95
April	120	110	120	120	125
Mei	100	120	150	110	105
Juni	90	100	140	80	135

Produk akhir dijual dengan harga 150 (ratusan ribu/ton)

Minyak sayur dan minyak non-sayur memerlukan jalur produksi yang berbeda untuk proses pemurniannya. Dalam beberapa bulan ini tidak dimungkinkan untuk memurnikan minyak sayur lebih dari 200 ton dan minyak non-sayur lebih dari 250 ton. Selama proses pemurnian dianggap tidak ada berat yang hilan dan biaya pemurnian tidak diperhitungkan. Dimungkinkan untuk menyimpan 1000 ton minyak mentah untuk digunakan nanti. Biaya penyimpanan untuk minyak sayur dan minyak non sayur adalah 5 (ratusan ribu)/ton/bulan. Produk akhir tak boleh disimpan, demikian juga dengan minyak yang telah dimurnikan. Pada awalnya terdapat 500 ton untuk tiap jenis minyak pada tempat penyimpanan. Disyaratkan bahwa persediaan yang ada pada akhir bulan Juni juga 500 ton untuk tiap jenis minyak.

Terdapat keterbatasan teknologi terhadap kekentalan produk akhir, yaitu antara 3 dan 4 unit satuan kekentalan. Diasumsikan kekentalan campuran bersifat linear dan kekentalan pada minyak mentah adalah:

Veg_1	Veg_2	Oil_1	Oil_2	Oil_3
8,8	6,1	2,0	4,2	5,0

Kebijakan apa yang harus diambil oleh perusahaan tersebut?

Penyelesaian:

Single Period Problem

Bila tidak terdapat minyak mentah yang boleh disimpan maka masalah menjadi:

- Apa yang harus dibeli di bulan Januari
- Campurannya terdiri dari apa saja

Model

Maks Profit: $-110X_1 - 120X_2 - 130X_3 - 100X_4 - 115X_5 + 150Y$

Kendala:

$$
\begin{aligned}
X_1 + X_2 &\leq 200 \\
X_3 + X_4 + X_5 &\leq 250 \\
8.8X_1 + 6.1\,X_2 + 2\,X_3 + 4.2\,X_4 + 5\,X_5 - 6Y &\leq 0 \\
8.8X_1 + 6.1\,X_2 + 2\,X_3 + 4.2\,X_4 + 5\,X_5 - 6Y &\geq 0 \\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 - Y &= 0
\end{aligned}
$$

#Multi period problem

Dalam tiap bulan hal yang perlu untuk ditentukan adalah jumlah dari minyak mentah yang harus: dibeli (*buy*), dipakai (*use*), disimpan (*store*)

Jumlahan tiap-tiap keadaan ini perlu peubah-peubah tersendiri untuk tiap-tiap bulan.

Jadi perubah yang ada adalah:

$$
\begin{gathered}
BVeg_{11}, BVeg_{12}, \ldots., BVeg_{16} \\
UVeg_{11}, UVeg_{12}, \ldots., UVeg_{16} \\
SVeg_{11}, SVeg_{12}, \ldots., SVeg_{16} \\
\ldots \\
BOil_{31}, BOil_{32}, \ldots., BOil_{36} \\
UOil_{31}, UOil_{32}, \ldots., UOil_{36} \\
SOil_{31}, SOil_{32}, \ldots., SOil_{36}
\end{gathered}
$$

Jumlah yang disimpan pada akhir periode (t-1)+
Jumlah yang dibeli pada periode ke-t
=
Jumlah yang digunakan pada periode ke-t +
Jumlah yang disimpan pada akhir periode ke t

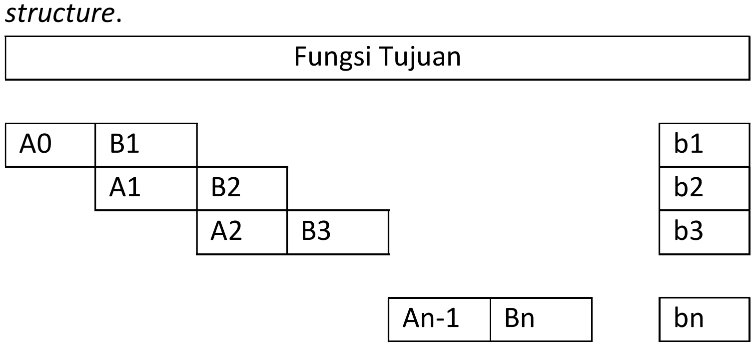
Pada keadaaan awal (bulan 0) dan pada keadaan akhir (bulan 6) jumlah yang disimpan konstan yaitu sebesar 500. Jadi relasi yang berlaku pada Veg_1 adalah

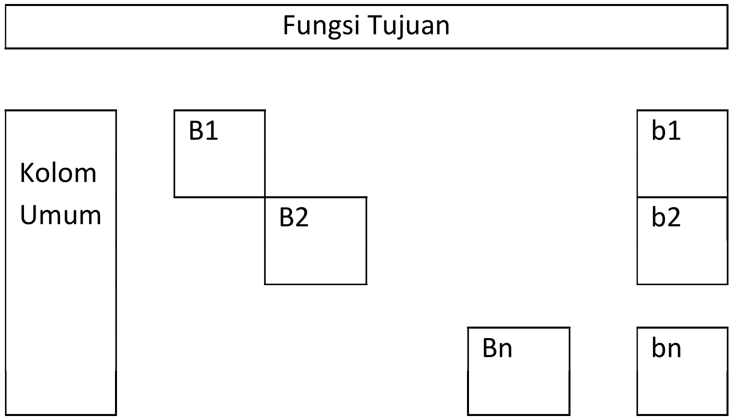
$$\begin{aligned}
BVeg_{11} - UVeg_{11} - SVeg_{11} &= -500 \\
SVeg_{11} + BVeg_{12} - UVeg_{12} - SVeg_{12} &= 0 \\
SVeg_{12} + BVeg_{13} - UVeg_{13} - SVeg_{13} &= 0 \\
SVeg_{13} + BVeg_{14} - UVeg_{14} - SVeg_{14} &= 0 \\
SVeg_{14} + BVeg_{15} - UVeg_{15} - SVeg_{15} &= 0 \\
SVeg_{15} + BVeg_{16} - UVeg_{16} &= 500
\end{aligned}$$

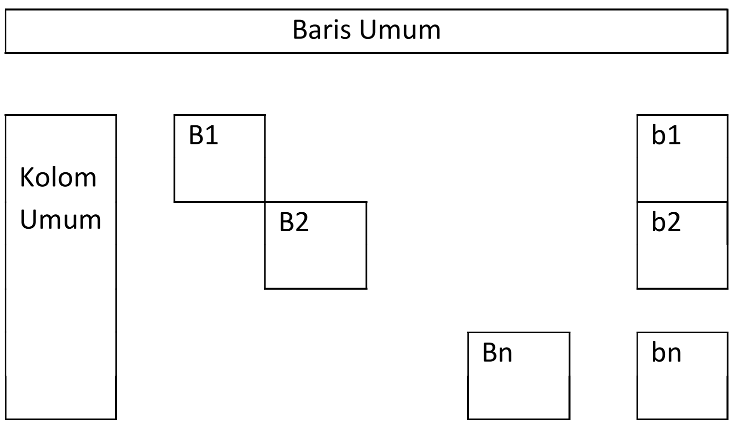
Hal ini berlaku juga untuk $Veg_2, \ldots, Oil_3$
Tambahkan peubah:
$SVeg_{10}$,..., dst dan $SVeg_{16}$,..., dst dan tetapkan nilainya = 500
Dengan fungsi tujuan minimum dari peubah penyimpanannya sebesar 5000
Pemisahan peubah-peubah $Prod_1, Prod_2, \ldots, Prod_6$ harus didefinisikan untuk mewakili jumlah produk yang harus dibuat tiap-tiap bulan. Masing-masing peubah memiliki keuntungan sebesar 150 (ratus ribu)
Jumlah peubah keseluruhan pada model ini adalah:
6 x 5 = 30 peubah membeli (*buy*)
6 x 5 = 30 peubah menggunakan (*use*)
5 x 5 = 25 peubah menyimpan (*storage*)
6 peubah produk
Total 91 peubah
6 x 5 = 30 kendala pada campuran
6 x 5 = 30 kendala penghubung pada peyimpanan.
Total 60 kendala

8.4. Beberapa Struktur dalam Multiple Model

Stuktur tangga (*staircase structure*). Struktur ini dapat diubah menjadi *block angular structure*.




Fungsi Tujuan
Kolom Umum
B1
B2
Bn
b1
b2
bn


Baris Umum
Kolom Umum
B1
B2
Bn
b1
b2
bn

Bab 9

Dekomposisi Model

Perhatikan contoh kasus pada Sub Bab 8.1, didapat model matematika:

Maks profit $Z = 10X_1 + 15X_2 + 10X_3 + 15X_4$

Kendala
$$
\begin{aligned}
4X_1 + 4X_2 + 4X_3 + 4X_4 &\leq 120 \\
4X_1 + 2X_2 &\leq 80 \\
2X_1 + 5X_2 &\leq 60 \\
5X_3 + 3X_4 &\leq 60 \\
5X_3 + 6X_4 &\leq 75 \\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Pada contoh ini pemecahan 120Kg bahan dasar A dan B dengan rasio 75:45 ternyata memberikan penyelesaian tak optimal. Penyelesaian optimal terjadi bila 120Kg bahan dasar dibagi dengan rasio 70:50. Dalam dekomposisi suatu model, masalah inilah yang menjadi masalah utama, yaitu menentukan perbandingan komposisi bahan antara satu *plant* dengan *plant* yang lain agar didapat penyelesaian optimal.

9.1. Dekomposisi Harga (*Pricing*)

Dari model di atas yang memiliki struktur angular, maka model dapat didekomposisikan menjadi

Maks Profit A	$10X_1 + 15X_2$	Profit B	$10X_3 + 15X_4$
Kendala			
Grinding A	$4X_1 + 2X_2 \leq 80$	*Grinding* B	$5X_3 + 3X_4 \leq 60$
Polishing A	$2X_1 + 5X_2 \leq 60$	*Polishing* B	$5X_3 + 6X_4 \leq 75$
	$X_1, X_2 \geq 0$		$X_3, X_4 \geq 0$

Dicari biaya internal pada bahan baku yang sesuai dan memecahkannya dalam submodel-submodelnya. Andaikan biaya internal itu adalah p (ribu)/Kg maka fungsi tujuan akan berubah menjadi:

Profit A $(10 - 4p)X_1 + (15 - 4p)X_2$

Profit B $(10 - 4p)X_3 + (15 - 4p)X_4$

Jika nilai p terlalu rendah maka akan didapat penggunaan bahan baku pada model gabungan akan melebihi persediaan.

Contoh:

Jika $p = 0$ maka didapat penyelesaian optimal

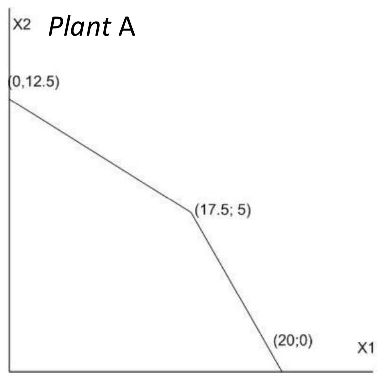
Plant A	profit = 250000	$X_1 = 17.5$	$X_2 = 5$
Plant B	profit = 187500	$X_3 = 0$	$X_4 = 12.5$

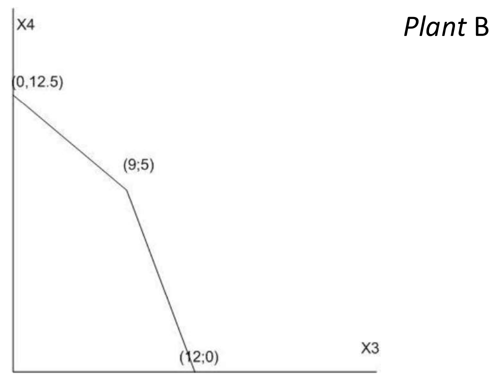
Bahan baku menjadi:

4(17.5) + 4(5) + 4 (0) + 4(12.5) = 140 Kg > 120 Kg (tidak mungkin)

- Berapapun juga nilai p, A dan B akan memiliki nilai optimal yang merupakan titik-titik penyelesaian dari submodel di atas
- Penyelesaian layak pada total problem harus layak juga terhadap kedua submodel, karena itu nilai-nilai X_1 dan X_2 pada penyelesaian layak untuk total model harus merupakan suatu kombinasi linear yang konvex dari titik-titik pada daerah layak (*feasible*), demikian juga untuk nilai-nilai X_3 dan X_4.

Perhatikan grafik optimum dari *Plant* A dan *Plant* B





Plant A

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda_{11}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{12}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{13}\begin{pmatrix} 17.5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_{14}\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = 1$

$X_1 = 20\lambda_{12} + 17.5\,\lambda_{13}$

$X_2 = \quad 5\quad \lambda_{13} + 12\,\lambda_{14}$

Plant B

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \lambda_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{22}\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_{23}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_{24}\begin{pmatrix} 0 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = 1$

$X_3 = 12\lambda_{22} + 9\,\lambda_{23}$

$X_4 = \quad 5\,\lambda_{23} + 12.5\,\lambda_{24}$

Substitusikan ke persamaan mula-mula didapat:

Maks Profit:

$200\lambda_{12} + 250\lambda_{13} + 180\lambda_{14} + 120\lambda_{22} + 165\lambda_{23} + 187.5\lambda_{24}$

Kendala Bahan Baku

Convex 1: $\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} \quad = 1$

Convex 2: $\quad \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = 1$

Model ini merupakan model untuk mendapatkan komposisi optimum, dan disebut sebagai <u>model utama</u> (*master model*)

Tiap-tiap titik penyelesaian (*solution vertex*) merupakan suatu usulan penyelesaian dari sub model yang diberikan dengan biaya internal sebesar p untuk bahan bakunya.
Contoh: usulan dari vertex ketiga, sub model 1 adalah: $(250 \quad 90 \quad 1 \quad 0)^t$

Aturan pada model utama adalah: Pilih kombinasi terbaik dari seluruh usulan yang ada.
Terlihat bahwa terdapat peubah λ_{ij} untuk tiap vertex pada tiap submodel. Dalam kenyataan peubah ini akan banyak sekali jumlahnya. Kenyataannya usulan-usulan yang diberikan oleh peubah-peubah ini akan sama dengan nol pada keadaan optimal, karena itu model utama dapat diringkas yaitu dengan hanya mengambil kolom-kolom yang memiliki nilai-nilai yang besar saja.
Dalam model di atas ambil kolom (pilih sebarang)

$$\underset{\lambda_{13}}{\begin{pmatrix} 250 \\ 90 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \text{ dan } \underset{\lambda_{24}}{\begin{pmatrix} 187.5 \\ 50 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ dan } \underset{\lambda_{11}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ dan } \underset{\lambda_{21}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Didapat
Maks profit $\quad 250\lambda_{13} + 187.5\lambda_{24}$
Kendala
Bahan baku $\quad 90\lambda_{13} + 50\,\lambda_{24} \leq 120$
Convex1: $\quad \lambda_{11} + \lambda_{13} \qquad = 1$
Convex2: $\qquad \lambda_{21} + \lambda_{24} = 1$
Jika model ini optimum maka akan diperoleh nilai pinggiran (*marginal value*/*worth value*) dari kendala bahan baku sebesar 2780. Nilai inilah yang menjadi nilai p dan digunakan sebagai biaya internal. Dengan p = 2.78(ribu) maka fungsi tujuan dari *plant* A menjadi
Profit A: $\quad -1.12X_1 + 3.18X_2$
Jika fungsi tujuan ini digunakan dengan kendala pada submodel A maka akan didapat penyelesaian $X_1 = 0;\ X_2 = 12$ (ini merupakan vertex (0;12))
Usulan yang berkorespondensi dengan vertex ini adalah kolom λ_{14} yaitu $(180 \quad 48 \quad 1 \quad 0)^t$ karena itu peubah baru ditambahkan pada batasan masalah utama dengan kolom di atas sebagai koefisien.

Dengan $p = 2.78$ maka fungsi tujuan B menjadi:
Profit B: $\quad -1.12X_3 + 3.18X_4$
Jika fungsi tujuan ini digunakan dengan kendala pada submodel B akan didapat penyelesaian:
$X_3 = 0;\ X_4 = 12.5$ (ini merupakan vertex (0;12.5))
Usulan yang berkorespondensi dengan vertex ini adalah kolom λ_{24}. Usulan ini sudah ada pada batasan masalah utama di atas.

Dengan penambahan λ_{14} model utama menjadi:

Maks profit: $250\lambda_{11} + 180\lambda_{14} + 187.5\,\lambda_{24}$

Kendala:

Bahan baku: $90\lambda_{13} + 48\lambda_{14} + 50\lambda_{24} \leq 120$

Convex 1: $\lambda_{11} + \lambda_{13} + \lambda_{14} = 1$

Convex2: $\lambda_{21} + \lambda_{24} = 1$

Jika model ini optimal, didapat *worth value* sebesar 1.67, dengan biaya internal p= 1.67(ribu) per Kg untuk bahan baku, didapat fungsi tujuan untuk A dan B:

Profit A $3.32X_1 + 8.32X_2$

Profit B $3.32X_3 + 8.32X_4$

Jika fungsi tujuan profit A digunakan dengan kendala pada submodel A, maka akan diperoleh pernyelesaian: $X_1 = 17.5; X_2 = 5$ (ini merupakan vertex (17.5;5))

Usulan yang berkorespondensi dengan vertex ini adalah kolom untuk λ_{13}. Usulan ini sudah ada pada masalah utama di atas.

Jika fungsi tujuan profit B digunakan dengan kendala pada submodel A, maka akan diperoleh pernyelesaian: $X_3 = 0; X_4 = 12.5$ (ini merupakan vertex (0;12.5))

Usulan yang berkorespondensi dengan vertex ini adalah kolom untuk λ_{14}. Usulan ini sudah ada pada masalah utama di atas.

Disimpulkan *plant A* dan B telah mengusulkan seluruh usulan yang berguna. Dari model utama didapat:

$\lambda_{13} = 0.52;\ \lambda_{14} = 0.48;\ \lambda_{24} = 1$

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0.52\begin{pmatrix} 17.5 \\ 5 \end{pmatrix} + 0.48\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.17 \\ 8.33 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 12.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12.5 \end{pmatrix}$

Penyelesaian optimal: $X_1 = 9.17;\ X_2 = 8.33;\ X_3 = 0;\ X_4 = 12.5; Z = 404.15$

APPENDIX

Geometri dalam R^n

Hyperplane

Ambil suatu persamaan garis dalam R^2 didapat:

$$aX + bY = k \tag{1}$$

Jika didefinisikan dalam vector kolom (atau matrix 2x1)

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};\ \bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Maka persamaan (1) dapat ditulis menjadi:

$$\bar{c}^t \bar{X} = k$$

Ambil suatu persamaan garis dalam R^3, didapat:

$$aX + bY + cZ = k \tag{2}$$

Jika didefinisikan dalam vector kolom (atau matrix 3x1)

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix};\ \bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Maka persamaan (2) dapat ditulis menjadi:

$$\bar{c}^t \bar{X} = k$$

Secara analogi aljabar maka R^n dapat didefinisikan sebagai berikut:

<u>Definisi</u>

Misalkan $\bar{c}$ adalah vector tak nol yang diberikan pada R^n, k adalah konstanta maka hyperplane H dalam R^n adalah himpunan dari:

$$H = \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} = k\} \tag{3}$$

Contoh 1:

Jika $\bar{c} = (1 \quad -2 \quad 3 \quad 4)^t$ adalah vector dalam R^4, maka himpunan $H = \{\bar{X} \in R^4 | \bar{c}^t \bar{X} = -2\}$ merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan linear: $X - 2Y + 3Z + 4W = -2$ dalam hyperplane R^4.

Catatan:

Hyperplane dalam R^2 merupakan sebuah garis, dan dalam R^3 merupakan sebuah bidang. Dari definisi hyperplane $= \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} = k\}$, maka

- R^n dapat dibagi menjadi dua himpunan bagian yaitu:

  $$H_1 = \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} \le k\}$$
  $$H_2 = \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} \ge k\}$$

  Himpunan H_1 dan H_2 dinamakan *closed half spaces*. Terlihat bahwa $H_1 \cup H_2$ merupakan hyperplane H itu sendiri.

- R^n dapat dibagi menjadi tiga himpunan bagian yang saling lepas (*disjoint part*):

  $$\widetilde{H}_1 = \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} = k\}$$
  $$\widetilde{H}_2 = \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} < k\}$$
  $$\widetilde{H}_3 = \{\bar{X} \in R^n | \bar{c}^t \bar{X} > k\}$$

R^n adalah gabungan dari $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$ dan $\widetilde{H}_3$. Himpunan $\widetilde{H}_2$ dan $\widetilde{H}_3$ disebut sebagai *open half spaces*.

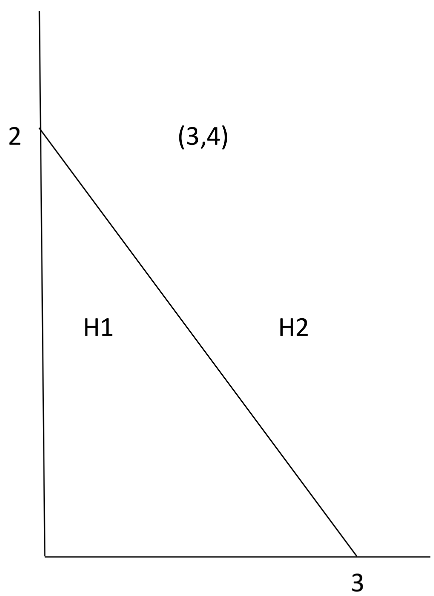
Tiap-tiap persamaan (1), (2) dan (3) merupakan persamaan linear dan mendefinisikan sebuah hyperplane. Jadi sebuah persamaan linear dengan n anu merupakan persamaan dari sebuah persamaan hyperplane dalam R^n. Kombinasi dari beberapa persamaan linear, masing-masing dengan n anu, dalam sebuah sistem persamaan linear mendefinisikan sebuah kumpulan dari hyperplane. Himpunan penyelesaian dari m persamaan linear dengan n anu merupakan himpunan titik-titik dalam R^n, dimana titik-titik itu merupakan interaksi / irisan dari m hyperplane.

Contoh 2:

Hyperplane dalam R^2 diberikan oleh:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 6 \right\}$$

Jika digambarkan:



Untuk menentukan himpunan dari H1 dan H2 Pilihlah titik sebarang yang tidak berada dalam Hyperplane (dalam contoh ini ‘garis’) dan hitunglah nilai dari $\bar{c}\bar{X}$.

Andaikan diambil titik (3,4), diperoleh:

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 6 + 12 = 18 > 6$

Jadi titik $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in H2$ dan daerah dimana $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Berada merupakan $H2$. Umumnya dipilih titik (0,0) sebagai titik uji.

Contoh 3:

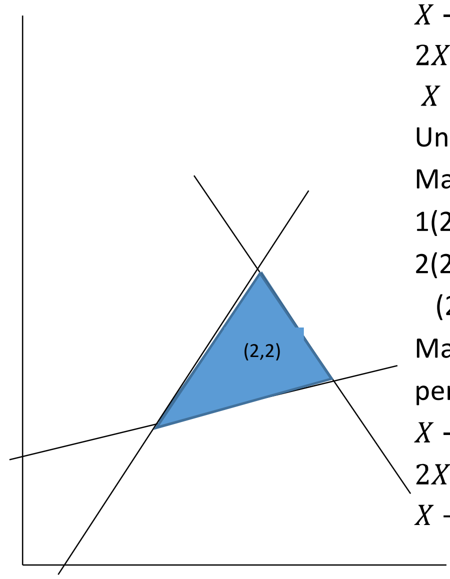
Hyperplane R^2 didefinisikan oleh persamaan-persamaan linear sebagai berikut:

$X = 0; X + Y = 2; X - 2Y = 4$

Interaksi terjadi di titik (0,2)

Contoh 4:

Hyperplane R^2 didefinisikan oleh persamaan-persamaan linear sebagai berikut:

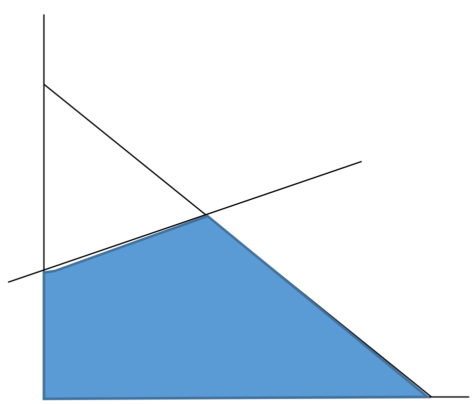


$X - 3Y = -2$
$2X - Y = 1$
$X + 2Y = 8$
Untuk mendeteksi daerah dimana titik (2,2) berada,
Maka dilakukan tes sebagai berikut:
1(2) -3 (2) = -4 < -2
2(2) - (2) = 2 > 1
(2) + 2(2) = 6 < 8
Maka daerah tersebut didefinisikan dengan pertidaksamaan sebagai berikut:
$X - 3Y \leq -2$
$2X - Y \geq 1$
$X + 2Y \leq 8$

Contoh 5:
Untuk melukiskan daerah dalam R^2 yang didefinisikan dalam pertidaksamaan:

$$X + Y \leq 8$$
$$2X + 3Y \leq 9$$

Pertama gambarlah dahulu hyperplane-nya, lalu teslah titik (0,0) untuk tiap-tiap persamaan baru tentukan daerah yang diarsir.



Himpunan Convex

Definisi:

Misalkan X_1, X_2 adalah 2 titik (atau vector) yang berbeda dalam R^n. Garis yang dibentuk oleh X_1 dan X_2 adalah himpunan dari titik-titika: $\{x \in R^n | x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \text{ real}\}$

Contoh 1:

Misalkan $x_1 = \binom{2}{3}$ dan $x_2 = \binom{1}{5}$ adalah dua titik dalam R^2 dan $X = \binom{x}{y}$ berada pada garis yang dibentuk oleh titik-titik yang diberikan jika dan hanya jika:

$$\binom{x}{y} = \lambda\binom{2}{3} + (1-\lambda)\binom{1}{5}$$

$$= \binom{2\lambda + (1-\lambda)}{3\lambda + 5(1-\lambda)}$$

$$x = \lambda + 1; y = -2\lambda + 5$$

dengan substitusi didapat $y = -2(x-1) + 5 = -2x + 7$ atau$y + 2x = 7$

<u>Definisi</u>

Segmen garis yang menggabungkan titik-titik x_1 dan x_2 dalam R^n adalah himpunan:

$$\{x \in R^n | x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; 0 \le x \le 1\}$$

Jika $\lambda = 0$ maka diperoleh x_2; jika $\lambda = 1$ diperoleh x_1. Titik-titik yang berada pada segmen garis dimana $0 < \lambda < 1$ dinamakan *interior points* atau titik-titik interior dari segmen garis.

Theorema 1

Sebuah *close* (*open*) *half space* merupakan himpunan yang convex.

Bukti:

H_1: *close half space*

$H_1: c^t x \le k$

Andaikan x_1 dan x_2 anggota H_1; $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \;\; (0 < \lambda < 1)$

Maka: $c^t x = c^t(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$= \lambda c^t x_1 + (1-\lambda)c^t x_2, \lambda \ge 0; (1-\lambda) \ge 0$

$c^t x_1 \le \lambda k + (1-\lambda)k = k$

$c^t x \le k$

Jadi: $x \in H_1$

Theorema 2:

Hyperplane merupakan himpunan yang convex

Theorema 3:

Interaksi dari kumpulan himpunan convex yang terbatas adalah convex

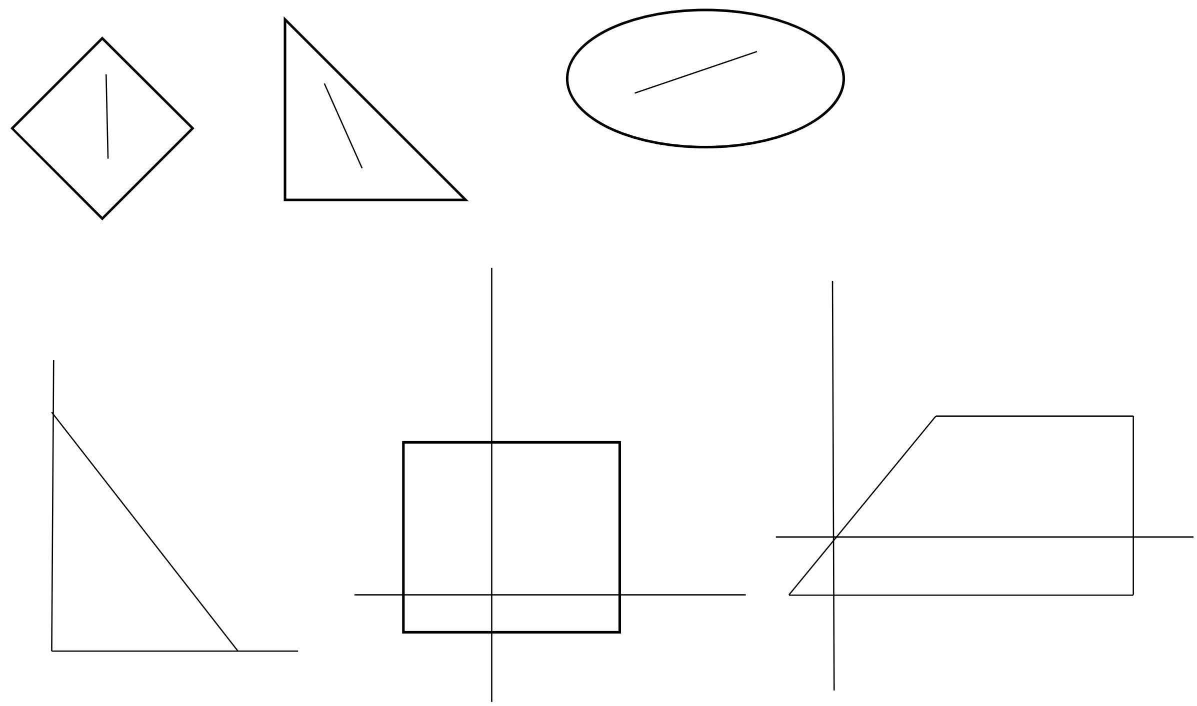
Theorema 4:

Jika A adalam matrix berukuran m x n, b adalah vector dalam R^m, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear merupakan himpunan yang convex.

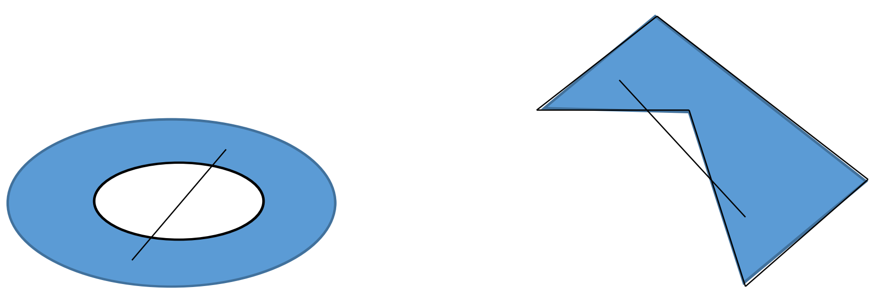
Definisi:

Sebuah himpunan bagian (*subset*) s dari R^n dinamakan convex jika untuk dua titik yang berbeda x_1 dan x_2 dalam s, segmen garis yang menghubungkan x_1 dan x_2 berada dalam s.
Jadi s convex jika x_1 dan $x_2 \in s$ sedemikian hingga:
$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ untuk $0 \leq \lambda \leq 1$

Contoh 2: Himpunan-himpunan yang convex



Himpunan-himpunan tak convex



Daftar Pustaka

Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J., and Sherali, H.D., *Linear Programming and Network Flows*, 4th Eds, John Wiley&Sons, New Jersey, 2010

Hillier, F. S., and Lieberman, G.J., *Introduction to Operations Research*, 9th Eds., McGraw Hill, New York, 2010.

Ragsdale, C.T., *Spreadsheet Modeling & Decision Analysis*, 5th Eds., Thomson South-Western, Mason, 2008

Taha, H.A. *Introduction to Operations Research*, 8th Eds., Prentice Hall, New Jersey, 2007.